

المعادلات التفاضليّة

الجزء الأول

تأليف

الأستاذ الدكتور

حسن مصطفى العويضي

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتورة

سناء علي زارع

أستاذ الرياضيات المساعد

كلية التربية للبنات - الرياض

الدكتور

عبد الوهاب عباس رجب

أستاذ الرياضيات بجامعة الأزهر

كلية التربية للبنات - الرياض

مكتبة الرشيد
ناشر

المحتويات

المقدمة ١

الباب الأول : مفاهيم أساسية

- ١-١ مقدمة ٩
- ٢-١ الحل العام والحل الخاص ١٢
- ٣-١ تكوين المعادلة ١٢
- ٤-١ الشروط الابتدائية والشروط الحدية ١٥
- ٥-١ نظرية الوجود والحدودية ١٧
- تمارين ٢٠

الباب الثاني : معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

- ١-٢ طريقة فصل المتغيرات ٢٤
- ٢-٢ المعادلة المتجانسة ٢٧
- ٣-٢ المعادلات التفاضلية التامة ٣٩
- ٤-٢ معادلة تفاضلية تؤول إلى تامة أو عامل التكامل ٤٣
- ٥-٢ المعادلات التفاضلية الخطية ٤٨
- ٦-٢ معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية ٥٤
- تمارين ٦٦

الباب الثالث : تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

١-٣	المسارات المتعامدة.....	٧٥
٢-٣	المسارات غير المتعامدة.....	٨١
٣-٣	مسائل النمو والاضمحلال.....	٨٤
٤-٣	مسائل درجة الحرارة.....	٨٦
٥-٣	مسائل الجسم الساقط.....	٨٩
	تمارين.....	٩٤

الباب الرابع : المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجات العليا

	مقدمة	٩٩
١-٤	معادلات تفاضلية على الصورة $f(y') = 0$	٩٩
٢-٤	معادلات تفاضلية على الصورة $f(x, y') = 0$	١٠١
٣-٤	معادلات تفاضلية على الصورة $f(y, y') = 0$	١٠٣
٤-٤	معادلة لاجرانج.....	١٠٤
٥-٤	معادلة كليبرو.....	١٠٧
	تمارين.....	١٠٩

الباب الخامس : المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

	مقدمة	١١٣
١-٥	خواص حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية.....	١١٥
٢-٥	حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة لنونية ذات المعاملات الثابتة.....	١٢٣
٣-٥	حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.....	١٣٠

١٣٧.....	أمثلة متنوعة	٤-٥
١٥٩.....	تمارين	

الباب السادس : معادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة

١٦٦.....	معادلة أولير التفاضلية	١-٦
١٨١.....	تمارين	
١٨٢.....	معادلة لاجرانج التفاضلية	٢-٦
١٩١.....	تمارين	
١٩٣.....	بعض الحالات الخاصة	٣-٦
٢٠٢.....	تمارين	

الباب السابع : طريقة المعاملات غير المعينة

٢٠٥.....	الصورة المبسطة للطريقة	١-٧
٢٠٦.....	تعميمات	٢-٧
٢٠٧.....	تعديلات	٣-٧
٢٠٧.....	قيود على الطريقة	٤-٧
٢١٥.....	تمارين	

الباب الثامن : طريقة تغيير البارامترات (الوسائط)

٢١٩.....	مقدمة	١-٨
٢٢٢.....	أمثلة متنوعة	٢-٨
٢٣١.....	تمارين	

الباب التاسع : تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

١-٩	مسائل الزنبرك	٢٣٥
٢-٩	مسائل الدوائر الكهربائية	٢٤٣
٣-٩	مسائل الطفو	٢٤٨
٤-٩	تصنيف الحلول	٢٥٣
	تمارين	٢٥٦

الباب العاشر : تحويل لابلاس وتطبيقاته

١-١٠	تعريف	٢٦١
٢-١٠	خواص المؤثر $L\{ \}$	٢٦١
٣-١٠	تحويلات لابلاس العكسية	٢٧١
٤-١٠	تحويلات لابلاس للمشتقات	٢٧٣
٥-١٠	تطبيقات تحويل لابلاس	٢٧٥
	تمارين	٢٨٩

الباب الحادى عشر : استخدام المتسلسلات فى حل المعادلات التفاضلية

١-١١	مقدمة	٢٩٣
٢-١١	طريقة متسلسلات تايلور	٢٩٧
٣-١١	طريقة فروبنيوس	٣٠٢
	تمارين	٣١٤

ملحق

جدول التكاملات	٣١٩
----------------	-----

المراجع	٣٢٥
---------	-----

المقدمة

مازالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم فى فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلى مساهمتها فى دراسة التحليل الرياضى وامتدت استخداماتها فى العلوم الاقتصادية والاجتماعية . وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها فى جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

وفى هذا الكتاب عرضنا كيفية تكوين المعادلة التفاضلية وطرق حلها سواء كانت خطية متجانسة أو غير متجانسة من أى رتبة وذات معاملات ثابتة أو متغيرة ؛ هذا بالإضافة إلى حل المعادلات غير الخطية من الرتبة الأولى مع بعض التطبيقات المختلفة .

ثم أضفنا فى الباب العاشر تحويلات لابلاس وتطبيقاته وفى الباب الحادى عشر عرضنا كيفية حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات . كما زدنا الكتاب بمسائل كثيرة متنوعة لتنمى قدرة الطالب .

وقد راعينا عند إعداد هذا الكتاب أن نقلل من البراهين النظرية والإكثار من الأمثلة دون الإخلال بالدقة العلمية حتى تكون المادة العلمية سهلى المأخذ عظيمة المنفعة .

الباب الأول

مفاهيم أساسية

الباب الأول

مفاهيم أساسية

١- مقدمة :

تعريف

المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية y', y'', \dots أي أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x, y مستقلان ، وكان $z(x, y)$ ، متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x, y جزئياً ، سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ، معادلة تفاضلية جزئية ، وهي على الصورة :

$$G(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية :

$$y'''' + 2y''' - 5y = \sin x \quad (1)$$

$$y' + xy = x^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x \quad (3)$$

نلاحظ أن المعادلتين (1)، (2) كلاً منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة (3) معادلة تفاضلية جزئية .

تعريف :

رتبة المعادلة Order : هي رتبة أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة .

درجة المعادلة Degree : هي درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلى فى المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .

مثال :

من مجموعة المعادلات التفاضلية السابقة نجد أن المعادلة (1) من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية بينما المعادلة (2) من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة (3) فهي تفاضلية جزئية (ليست محل دراستنا) وهى من الرتبة الثانية والدرجة الأولى .

مثال :

أوجد رتبة ودرجة المعادلة $y'' = (5 - 2y')^{\frac{3}{2}} = 0$.

الحل :

المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية لماذا ؟

تعريف :

حل المعادلة التفاضلية Solution of D.E. : تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة

التفاضلية $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ إذا كانت :

(١) قابلة للاشتقاق n مرة .

(٢) تحقق المعادلة التفاضلية أى : $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

مثال :

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت .

الحل :

$$y(x) = c \sin x,$$

$$y'(x) = c \cos x,$$

$$y''(x) = -c \sin x$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$y''(x) + y(x) = -c \sin x + c \sin x = 0$$

مثال :

أثبت أن (1) $\ln y + \frac{x}{y} = c, y > 0$ حيث c ثابت هو حل للمعادلة

$$(2) \dots\dots\dots (y-x) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

الحل :

بتفاضل طرفي $\ln y + \frac{x}{y} = c$ بالنسبة إلى x :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \frac{y-x}{y^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = 0$$

$$y \neq 0$$

$$(y-x) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

أى أن المعادلة (١) حل للمعادلة (٢) .

٢- الحل العام والحل الخاص *General Solution and Particular Solution* :

الحل العام لمعادل تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

أما الحل الخاص هو أى حب يحقق المعادلة التفاضلية لايشتمل على أى ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية فى الحل العام بقيم محددة .

مثال :

الحل العام للمعادلة $y''' - 5y' + 6y = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ونجد أن بعض الحلول الخاصة على الصور :

$$y = e^{2x} + e^{3x}$$

$$y = 3 + 5e^{2x^2}$$

$$y = 5 - 2e^{3x}$$

٣- تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت) :

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n ، نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (I)$$

حيث c_1, c_2, \dots, c_n ثوابت اختيارية ، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجرى n من المشتقات للمعادلة (I) .

يكون لدينا $n+1$ من المعادلات عبارة عن المعادلة (I) بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية التى عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة .

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y = c \sin x$ (1)

الحل :

نفاضل مرة واحدة

$$y' = c \cos x \text{ (2)}$$

نحذف c من المعادلتين (2) , (1) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي : $y' = y \cot x$

حل آخر :

يمكن لحذف c من (2) , (1) نستخدم المحدد :

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y \cos x - y' \sin x = 0$$
$$\therefore y' = y \cot x$$

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \text{ (1)}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

الحل :

بتفاضل (1) مرتين :

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \text{ (2)}$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} \text{ (3)}$$

لحذف c_1, c_2 :

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow y(18-12) - y(9-4) + y'(3-2) = 0$$

$$\therefore y'' - 5y' + 6y = 0$$

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام :

$$y = c_1 + c_2 x + x^2$$

الحل :

نضع الحل العام على الصورة :

$$y - x^2 = c_1 + c_2 x$$

ونفاضل هذا الحل مرتين ثم نحذف c_1, c_2 فنحصل على :

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$$\therefore y'' - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = 2$$

٤- الشروط الابتدائية والشروط الحدية

Initial Conditions and Boundary Conditions

فى بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطى بعض الشروط التى يجب أن تتحقق بحل المعادلة التفاضلية العادية . وهذه الشروط هى التى تمكننا من تحديد الثوابت الاختيارية التى تظهر فى الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

مثال :

أوجد حل المعادلة $y' = 2x$ التى تحقق الشرط $y(2) = 3$.

الحل :

$$y(x) = x^2 + c$$

بتكامل المعادلة التفاضلية

$$\therefore 3 = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

بالتعويض فى الشرط

$$\therefore \text{الحل المطلوب} \quad y(x) = x^2 - 1$$

والحل يعنى هندسياً ، منحنى يمر بالنقطة (2, 3) .

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية (مثلاً) يحتوى على ثابتين اختياريين ، لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة ، وهذان الشرطان يأخذان صوراً مختلفة ومنها :

١- إذا أعطى هذان الشرطان عند نفس النقطة x_0 مثل :

$$y(x_0) = a \quad , \quad y'(x_0) = b$$

فإن تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائية عند x_0 ونسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الابتدائية مسألة القيمة الابتدائية *Initial Value Problem* .

٢- إذا أعطى الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_2) = y_2$, $y(x_1) = y_1$ كانت الشروط شروطاً حدية ، وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلى الشروط الحدية مسألة القيمة الحدية *Boundary Value Problem* .

ملحوظة : الصورة القياسية لمعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى في الدالة المجهولة y هي $y' = f(x, y)$ والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

مثال :

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$y'' = x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

الحل :

بإجراء التكامل مرتين

$$y = \frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c_2$$

الذي يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة .

$$y' = \frac{1}{2} x^2 + c_1 \text{ حيث}$$

بالتعويض في الشروط الابتدائية :

$$\begin{array}{lll} y'(0) = -1 & \rightarrow & -1 = c_1 \\ y(0) = 1 & \rightarrow & 1 = c_2 \end{array} \quad \rightarrow \quad c_1 = -1$$

ويكون حل المسألة المعطاة هو :

$$y = \frac{1}{6} x^3 - x + 1$$

مثال :

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية :

$$y'' = 6x + 2$$

$$y(0) = 2$$

$$y(2) = 8$$

مع الشروط الحدية :

الحل :

بتكامل طرفي المعادلة مرتين بالنسبة إلى x ، نجد أن :

$$y = x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية فنحصل على :

$$y(0) = 2 \quad \therefore \boxed{2 = B}$$

$$y(2) = 8 \quad \therefore 8 = 8 + 4 + 2A + 2 \quad \boxed{A = -3}$$

ويكون الحل المطلوب هو :

$$y = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

٥- نظرية الوجود والوحدوية لحل المعادلة التفاضلية العادية (بدون برهان)

سوف نعرض للنظرية الأساسية لوجود ووحدوية حل المعادلة التفاضلية العادية .

نظرية :

نفرض المعادلة التفاضلية :

$$y' = f(x, y) \dots\dots\dots (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \dots\dots\dots (2) \quad \text{ونفرض الشرط الابتدائي}$$

وإذا كانت الدالة $f(x, y)$ المعرفة في المنطقة المغلقة المحددة R :

$$R : |x - x_0| \leq a , \quad |y - y_0| \leq b$$

حيث a, b ثابتان ، تحقق :

١- الدالة $f(x, y)$ متصلة ومن ثم محدودة أى إذا وجد عدد موجب M فإن

$$|f(x, y)| \leq M$$

٢- الدالة $f(x, y)$ لها مشتقة جزئية بالنسبة إلى y ومحدودة أى أن $\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K$

حيث K عدد موجب .

فإن المعادلة (1) يكون لها حل وحيد $y = y(x)$ يحقق الشرط الابتدائي (2) في المنطقة

$$|x - x_0| \leq h , \quad \text{حيث } h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

مثال :

ابحث عن وجود حل وحيد للمسألة الابتدائية $y(0) = 0$; $y' = x^2 + y^2$.

الحل :

حيث أن $f(x, y) = x^2 + y^2$ دالة كثيرة حدود في x, y .

إن الحل بأى شروط ابتدائية يكون وحيداً .

نكون المستطيل R الذى مركزه $(0, 0)$ أى :

حيث $a, b > 0$

$$R : |x| \leq a ,$$

$$|y| \leq b$$

$$|f(x, y)| = |x^2 + y^2| \leq |x^2| + |y^2| = x^2 + y^2 = M, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{a^2 + b^2}\right)$$

أى أن h تعتمد على a, b ، فإذا كانت مثلاً $a = b = 1$ نجد أن $h = \min(a, \frac{1}{2})$ أى أن $h = \frac{1}{2}$ ، وبالتالي فإن المعادلة $y' = x^2 + y^2$ لها حل وحيد فى الفترة $|x| \leq \frac{1}{2}$ يحقق الشرط $y(0) = 0$.

ملحوظة : لبرهان هذه النظرية أنظر الجزء الثانى من الكتاب .

تمارين

١. حدد رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية فى كل من :

- 1) $y''' - 3xy' + y = e^x + 1$
- 2) $t y'' + t y' + \cos \sqrt{y} = t^2 + 1$
- 3) $s^2 \frac{d^2 t}{ds^2} - s \frac{dt}{ds} + 3s = 0$
- 4) $2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^5 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^9 + y^3 - x = 0$

٢. ضع المعادلات التالية فى الصورة القياسية :

- 1) $x^2 y' + 3y = 0$
- 2) $x y' + \sin y + y = 3$
- 3) $\frac{x+y}{x-y} dx + 3dy = 0$
- 4) $dy - dx = 0$

٣. كون المعادلات التفاضلية العادية بحذف الثوابت a, b, c .

- 1) $y = a x^2 - bx + c$
- 2) $y = a e^{2x} + b e^x$
- 3) $y = a \sin 3x + b \cos 3x$
- 4) $\ln y = ax^2 + bx + c$
- 5) $y = A e^x + B e^{2x} + c e^{3x}$
- 6) $y = a e^x + b$

الباب الثانى

معادلات تفاضلية

من الرتبة الأولى

والدرجة الأولى

الفصل الثانى

معادلات تفاضلية

من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة :

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \text{أو}$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

١- طريقة فصل المتغيرات *Separation of Variables* :

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x) dx + g(y) dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة فى x فقط و $g(y)$ دالة فى y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C$$

حيث C ثابت اختياري ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي ، نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلاً خاصاً .

مثال :

أوجد الحل العام والمنحنى الخاص الذي يمر بالنقطة $(0,0)$ للمعادلة التفاضلية .

$$e^x \cos y \, dx + (1 + e^x) \sin y \, dy = 0$$

الحل :

بفصل المتغيرات ، وذلك بقسمة طرفي المعادلة المعطاة على $\cos y (1 + e^x)$ فنحصل على :

$$\therefore \frac{e^x}{1+e^x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

$$\therefore \ln(1 + e^x) - \ln |\cos y| = \ln c \quad \text{بالتكامل المباشر}$$

$$\therefore \ln \frac{(1+e^x)}{|\cos y|} = \ln c$$

$$1 + e^x = c |\cos y| \quad \text{وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :}$$

بالتعويض عن $x = 0, y = 0$

$$\therefore 1 + 1 = c \quad \text{و} \quad c = 2$$

$$1 + e^x = 2 |\cos y| \quad \text{ويكون الحل الخاص}$$

مثال :

أوجد معادلة المنحنيات التي تحقق المعادلة :

$$xy \, dy - \frac{1+y^2}{1+x^2} \, dx = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ثم أوجد حل المعادلة (1) التي تعطى شكلاً يمر بالنقطة (1, -3) .

الحل :

بفصل المتغيرات نحصل على :

$$\frac{1}{1+y^2} \, dy - \frac{1}{x(1+x^2)} \, dx = 0$$

باستخدام الكسور الجزئية ، ليكن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1x + B_2}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x^2) + (B_1x + B_2)x$$

وبمساواة الحد المطلق في الطرفين نحصل على : $A = 1$

$$A + B = \Rightarrow \quad B_1 = -1 \quad \text{وبمساواة معامل } x^2 \text{ في الطرفين نحصل على :}$$

$$B_2 = 0 \quad \text{وبمساواة معامل } x \text{ في الطرفين نحصل على :}$$

أى أن :

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

وتصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{y}{1+y^2} \, dy - \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right] \, dx = 0$$

وبالتكامل المباشر نحصل على :

$$\frac{1}{2} \ln (1+y^2) - \ln x + \frac{1}{2} \ln (1+x^2) = \ln c$$

أى أن :

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2} = k, \quad c^2 = k$$

$$\frac{(10)(2)}{1} = k \Rightarrow k = 20$$

عند $x = 1, y = -3$ يكون :

وعلى ذلك يكون الحل الخاص المطلوب هو :

$$(1+x^2)(1+y^2) = 20x^2$$

$$1 - 19x^2 + x^2y^2 + y^2 = 0$$

مثال :

$$y' + e^x y = e^x y^2$$

أوجد الحل العام للمعادلة :

الحل :

$$y' = e^x (y^2 - y)$$

نكتب المعادلة على الصورة

$$e^x dx = \frac{1}{y(y-1)} dy$$

ثم بفصل المتغيرات نحصل على :

$$e^x dx = \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right] dy$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن :

$$-e^x = \ln |y-1| - \ln |y| + c$$

ثم بالتكامل المباشر نحصل على :

وهو الحل العام ...

٢- المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Equation

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

متجانسة إذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \quad , \lambda \in R$$

ومثال ذلك :

$$1) f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

$\therefore f(x,y)$ متجانسة من درجة 2 .

$$2) f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{3/2} f(x,y)$$

$\therefore f(x,y)$ متجانسة من درجة $3/2$.

على ذلك فإن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن أن توضع على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

وحيث أن M, N متجانسة من نفس الدرجة نجد أن $f(x,y)$ متجانسة من درجة صفر .

أى أن من الممكن $f(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$.

الخلاصة :

المعادلة التفاضلية $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ تكون متجانسة إذا كانت كل من M, N

متجانسة من نفس الدرجة .

أى أن المعادلة على الصورة $y' = f(x/y)$ تكون معادلة متجانسة .

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $\frac{y}{x} = v$ أى $y = xv$ وبالتالى $dy = x dv + v dx$ ثم تتحول المعادلة إلى معادلة يمكن فصل متغيراتها ، ثم تحل كما سبق .

مثال :

$$(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة :

الحل :

من الواضح أن المعادلة متجانسة .

$$dy = v dx + x dv \quad \Leftarrow \quad \text{نستخدم التعويض } y = vx$$

$$\therefore (x^2 + v^2 x^2) dx - 2x^2 v (v dx + x dv) = 0$$

∴ بالقسمة على x^2 نحصل على :

$$(1 + v^2) dx - 2v (v dx + x dv) = 0$$

$$\therefore [1 + v^2 - 2v^2] dx - 2v x dv = 0$$

أى أن

$$\therefore (1 - v^2) dx - 2v x dv = 0$$

أى

$$\frac{1}{x} dx - \frac{2v}{1 - v^2} dv = 0$$

وبفضل المتغيرات نحصل على

$$\ln x + \ln (1 - v^2) = \ln c$$

∴ بالتكامل المباشر

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{حيث أن :}$$

$$\therefore x \left[1 - \frac{y^2}{x^2} \right] = c$$

$$x^2 - y^2 = cx$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

أوجد الصورة العامة للمعادلة :

الحل :

حيث أن المعادلة متجانسة ، نضع $y = vx \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right) = v$

$$\therefore y' = v + xv'$$

$$\therefore v + xv' = f(v) \quad) \quad xv' = f(v) - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

أى أن

$$\therefore \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \ln cx$$

أى أن الحل العام

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{حيث}$$

مثال :

$$2x^2y' - y(2x+y) = 0$$

استخدم النتيجة السابقة فى حل المعادلة :

الحل :

المعادلة متجانسة لماذا ؟

$$\therefore y' = \frac{2xy + y^2}{2x^2} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

بوضع $\frac{y}{x} = v$

$$\therefore f(v) = v + \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow f(v) - v = \frac{1}{2}v^2$$

\therefore حل المعادلة

$$\int \frac{dv}{\frac{1}{2}v^2} = \ln c x$$

$$\therefore \frac{-2}{v} = \ln c x$$

$$\frac{-2x}{y} = \ln c x$$

أى أن :

وهو الحل العام .

ولإيجاد الحل الخاص نستخدم التعويض $y(e) = e$

$$\frac{-2e}{e} = \ln c e \Rightarrow -2 = \ln c + 1$$

$$\ln c = -3 \Rightarrow c = e^{-3}$$

$$\frac{-2x}{y} = -3 + \ln x$$

\therefore الحل الخاص

$$2x + y \ln x = 3y$$

أو

معادلات تفاضلية عادية تؤول إلى معادلات متجانسة :

تكون هذه المعادلات التفاضلية العادية على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad (1)$$

حيث $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت :

إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة التفاضلية (1) تؤول إلى المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} \quad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة حيث أن كل من دالتى البسط والمقام متجانسة من الدرجة الأولى وفى هذه الحالة يمكن حل المعادلة (2) كما فى البند السابق .

لحل المعادلة التفاضلية العادية (1) فإننا نبحث فيما إذا كان الخطان المستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (3)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

يتقاطعان أم لا يتقاطعان .

ولذلك سنناقش الحالتين كل على حدة .

الحالة الأولى :

إذا كان المستقيمان متقاطعان :

يتقاطع المستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

إذا كان :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{or} \quad a_1 b_2 = b_1 a_2$$

بافتراض أن نقطة تقاطع المستقيمان هي (h, k) فإننا نستخدم التعويض

$$y = v + k, \quad x = u + h$$

$$\text{حيث } h, k \text{ ثوابت وعلى ذلك فإن } \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) فإننا نحصل على :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 u + b_2 v + (a_2 h + b_2 k + c_2)} \quad (4)$$

وحيث أن (h, k) نقطة تقاطع المستقيمان (3) ، أى أنها تقع على كل منهما وعليه فإن :

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

وعلى هذا فإن المعادلة التفاضلية (4) تأخذ الصورة :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \quad (5)$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة فى المتغيرين u, v ويمكن حلها كما سبق وذلك باستخدام

التعويض $v = zu$ فتتحول المعادلة التفاضلية (5) إلى معادلة تفاضلية تحل بفصل المتغيرات

ثم نستخدم التعويض $z = \frac{v}{u}$ ثم نعوض بعد ذلك عن كل من u, v حيث $u = x - h, v = y - k$

فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية (1) .

والآن سنعطى مجموعة من الأمثلة المحولة .

مثال :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 3}{x + y - 2}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :

الحل :

واضح أن المستقيمان

$$2x + y - 3 = 0$$

$$x + y - 2 = 0$$

متقاطعان وبحل هاتين المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هي $(1,1)$ نستخدم التعويض :

$$x = u + 1$$

$$y = v + 1$$

ومنها نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{2(u+1) + (v+1) - 3}{u+1 + v+1 - 2} \\ &= \frac{2u + v}{u + v}\end{aligned}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة في u, v نستخدم التعويض $v = uz$ ومنها :

$$\frac{dv}{du} = v \frac{dz}{du} + z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u \frac{dz}{du} + z = \frac{2u + uz}{u + uz} \Rightarrow u \frac{dz}{du} + z = \frac{2 + z}{1 + z}$$

إذن :

$$\begin{aligned} u \frac{dz}{du} &= \frac{2+z}{1+z} \\ &= \frac{2+z-z+z^2}{1+z} = \frac{2-z^2}{1+z} \end{aligned}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1+z}{2-z^2} dz = \frac{du}{u} \quad (5)$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\begin{aligned} \int \frac{1+z}{2-z^2} dz &= \int \frac{du}{u} \\ \Rightarrow \int \frac{dz}{2-z^2} + \int \frac{z}{2-z^2} dz &= \ln|u| + c_1 \end{aligned}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

بالنسبة للتكامل $\int \frac{z}{2-z^2} dz$ نجد أن :

$$\int \frac{z \cdot dz}{2-z^2} = -\frac{1}{2} \ln|2-z^2| + c_2$$

وبالنسبة للتكامل $\int \frac{dz}{2-z^2}$ باستخدام الكسور الجزئية فإننا نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-z^2} &= \frac{1}{(\sqrt{2}-z)(\sqrt{2}+z)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}-z} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}+z} \end{aligned}$$

ومنها :

$$\int \frac{dz}{2-z^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}-z} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}+z}$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}-z| + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}+z| + c_3$$

مما سبق نجد أن الحل العام للمعادلة (5) هو :

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}-z| + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}+z| - \frac{1}{2} \ln|2-z^2| = \ln|u| + c$$

حيث $c = c_1 + c_2 + c_3$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \frac{u}{v}}{\sqrt{2} - \frac{v}{u}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 2 - \frac{v^2}{u^2} \right| = \ln|u| + c$$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل العام هو :

ولكن $u=x-1$, $v=y-1$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln \left| \frac{\sqrt{2}(x-1)+y-1}{\sqrt{2}(x-1)-y+1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2(x-1)^2 - (y-1)^2}{(y-1)^2} \right| = \ln|x-1| + c$$

مثال :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

الحل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x+y-3=0$$

$$x-y-1=0$$

متقاطعان ، وبحل المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هي (2, 1) نستخدم التعويض :

$$x = u + 2, \quad y = v - 1$$

ومنها $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{u+2+v+1-3}{u+2-v-1-1} \\ \Rightarrow \frac{dv}{du} &= \frac{u+v}{u-v} \end{aligned}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة في u, v نستخدم التعويض $v = uz$.

$$\frac{dv}{du} = u \frac{dz}{du} + z \quad \text{ومنها :}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$\begin{aligned} u \frac{dz}{du} + z &= \frac{u+uz}{u-uz} = \frac{1+z}{1-z} \\ \Rightarrow u \frac{dz}{du} &= \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z} \end{aligned}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{du}{u} \quad \text{وبفصل المتغيرات نجد أن :}$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z dz}{1+z^2} = \int \frac{du}{u} + c$$

حيث c ثبات اختياري ومنها :

$$\tan^{-1} = -\frac{1}{2} \ln |1+z^2| = \ln |u| + c$$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل هو :

$$\tan^{-1} \frac{v}{u} - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{v}{u} \right)^2 \right| = \ln |u| + c$$

ولكن $v = y - 1$, $u = x - 2$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\tan^{-1} \frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{y-1}{x-2} \right)^2 \right| = \ln |x-2| + c$$

الحالة الثانية :

إذا كان المستقيمان متوازيان ، فإننا نفترض أن المستقيمان (3) متوازيان فإن شرط التوازي هو :

$$a_1 b_2 = a_2 b_1$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض :

$$z = a_1 x + b_1 y \quad \text{or} \quad z = a_2 x + b_2 y$$

أيهما أكثر سهولة فى هذه الحالة بعد التعويض تتحول المعادلة التفاضلية العادية (1) إلى معادلة تفاضلية تحل بطريقة فصل المتغيرات والذي سنوضحه فى الأمثلة المحولة الآتية :

مثال :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

الحل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x + y - 5 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

متوازيين . نستخدم التعويض :

$$z = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} - 1 &= \frac{z-5}{z+1} \\ \Rightarrow \frac{dz}{dx} &= \frac{z-5}{z+1} + 1 = \frac{2z-4}{z+1} \end{aligned}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\begin{aligned} \int \frac{z+1}{2z-4} dz &= \int dx + c \\ \Rightarrow \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \ln|z-2| &= x + c \end{aligned}$$

ولكن $z = x + y$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2} \ln|x=y-2| = x + c$$

حيث c ثابت اختياري .

مثال :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :

الحل :

$$2x + y - 1 = 0$$

نلاحظ أن المستقيمان

$$4x + 2y + 5 = 0$$

متوازيان ، نستخدم التعويض :

$$z = 2x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{2z+5} + 2 = \frac{5z+9}{2z+5}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int \frac{2z+5}{5z+9} dz = \int dx + c$$

ومنها :

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z+9| = x + c$$

ولكن $z = 2x + y$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25} \ln|10x+5y+9| = x + c$$

حيث c ثابت اختياري .

٣- المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

تعريف : التفاضلة التامة :

التفاضلة التامة للدالة $f(x, y)$ تكون على الصورة :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

وإذا كانت مساوية الصفر فإن :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad (1)$$

تسمى معادلة تفاضلية تامة ، ونلاحظ أن :

$df(x, y) = 0$ أى أن حلها يكون $f(x, y) = c$

حيث c مقدار ثابت .

فإذا كان لدينا المعادلة التفاضلية .

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

فإنها تكون تامة بالمقارنة بالمعادلة (1) التامة إذا كان :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad (3), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \quad (4)$$

السؤال الآن ما الشرط الضرورى حتى تكون المعادلة (2) تامة ؟

بتفاضل (3) جزئياً بالنسبة إلى y وتفاضل (4) جزئياً بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ومع اعتبار أن المشتقات الجزئية للدالتين M, N متصلة فإن الشرط الضرورى حتى تكون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

المعادلة (2) تامة هو :

ولحل المعادلة التامة (2) نفترض دالة ما $f(x, y)$ تحقق :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

فيكون حلها $f(x, y) = c$ حيث c ثابت .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \dots\dots\dots(3), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N \dots\dots\dots(4)$$

وتحقق

بإجراء التكامل على المعادلة (3) بالنسبة إلى x .

$$\therefore f(x, y) = \int^x M(x, y) dx + \varphi(y) \quad (5)$$

حيث نلاحظ أن $\varphi(y)$ مقدار ثابت بالنسبة إلى x .

ثم بتفاضل طرفي (5) جزئياً بالنسبة إلى y واستخدام المعادلة (4) ينتج أن :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x, y) dx + \varphi'(y) = N$$

$$\varphi'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x, y) dx \quad \text{أى أن}$$

سوف نلاحظ أن الطرف الأيمن في المعادلة الأخيرة دائماً دالة في y فقط ... (لماذا) ؟

وبتكامل طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى y ، نستنتج شكل الدالة $\varphi(y)$ حيث :

$$\varphi(y) = \int^y N(x, y) dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x, y) dx \right] dy$$

وبالتعويض في المعادلة (5) نحصل على حل المعادلة التفاضلية التامة (2) ويكون على الصورة :

$$\int^x M(x, y) dx + \int^y N(x, y) dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x, y) dx \right] dy = C \quad (6)$$

مثال :

أوجد حل للمعادلة :

$$(6x^2 + 4xy + y^2) dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2) dy = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2$$

نفترض أن :

$$N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y$$

نوجد

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{أى أن}$$

وعلى ذلك تكون المعادلة المعطاة تامة ، وبالتالي فإن :

$$\int^x M(x,y) dx = 2x^3 + 2x^2y + xy^2$$

$$\int^y N(x,y) dy = 2x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x,y) dx = 2x^2 + 2xy \Rightarrow \int^y \left[\frac{\partial}{\partial y} \int^x M(x,y) dx \right] dy = 2x^2y + xy^2$$

يكون حل المعادلة (باستخدام القانون) هو :

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 + 2x^2y + xy^2 - y^3 - 2x^2y - xy^2 = C$$

أى أن :

$$2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = C$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة .

ملحوظة (١) : يمكن حل المعادلة التفاضلية التامة (2) باستخدام القانون :

$$\int^x M dx + \int^y N dy - \int^x \left[\frac{\partial}{\partial x} \int^y N dy \right] dx = C$$

ويعطى نفس النتيجة المطلوبة .

ملحوظة (٢) : المثال الأخير يمكن حله باعتبار المعادلة تفاضلية متجانسة .

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 + 2 \ln 3x + \frac{3}{y}$$

أى أن المعادلة غير تامة .

لكن بضرب طرفى المعادلة فى $\frac{1}{x}$

نجد أن المعادلة المعطاة تصبح على الصورة :

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2 \ln 3x + \frac{3}{y})dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{نفترض أن}$$

أى بضرب طرفى المعادلة الأصلية فى $\frac{1}{x}$ تصبح تامة ، وهذا المقدار $\frac{1}{x}$ يسمى عامل التكامل (integrating factor) الذى يجعل المعادلة تامة .

٤- طريقة تعيين عامل التكامل $I(x,y)$:

إذا كانت المعادلة $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ غير تامة بضرب طرفى المعادلة فى $I(x,y)$ تصبح تامة .

أى أن المعادلة $IM dx + IN dy = 0$ تامة ، حيث I, M, N دوال فى x, y .

$$\frac{\partial(IM)}{\partial y} = \frac{\partial(IN)}{\partial x} \quad \therefore \text{يتحقق الشرط}$$

$$\therefore IM_y + I_y M = IN_x + I_x N$$

مع ملاحظة أن $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$I[M_y - N_x] = I_x N - I_y M \quad (I)$$

الآن نفترض حالات خاصة لعامل التكامل $I(x, y)$

$$: I(x, y) = I(x) \quad (١)$$

أى أن I دالة فى x فقط .

$$I_x = \frac{d\mu}{dx}, \quad I_y = 0$$

تصبح المعادلة (I) :

$$I[M_y - N_x] = N \frac{d\mu}{dx}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{dI}{I} = \frac{M_y - N_x}{N} dx$$

مع ملاحظة أن $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ (دالة فى x فقط) وبتكامل الطرفين نحصل على :

$$\ln I = \int p(x) dx$$

أى أن $I(x) = e^{\int p(x) dx}$ أو $I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$.

$$: I(x, y) = I(y) \quad (٢)$$

أى أن I دالة فى y فقط

$$I_y = \frac{dI}{dy}, \quad I_x = 0$$

وبالتعويض فى (I) نستنتج أن :

$$I(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

حيث نلاحظ أن $\frac{M_y - N_x}{-M}$ (دالة فى y فقط) .

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$(3x^3 + 2y)dx + (2x \ln 3x + \frac{3x}{y})dy = 0$$

الحل :

نفترض $M = 3x^3 + 2y$ ، $N = 2x \ln 3x + \frac{3x}{y}$ فيكون :

$$M_y = 2 \quad , \quad N_x = 2 + 2 \ln 3x + \frac{3}{y}$$

$$M_y - N_x = -(2 \ln 3x + \frac{3}{y}) \neq 0 \quad \text{أى أن :}$$

∴ المعادلة غير تامة

لكن :

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{(2 \ln 3x + \frac{3}{y})}{x(2 \ln 3x + \frac{3}{y})} = -\frac{1}{x} = p(x)$$

∴ يكون عامل التكامل :

$$I(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

بضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{x}$ تصبح تامة على الصورة

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2 \ln 3x + \frac{3}{y})dy = 0$$

$$M = 3x^2 + \frac{2y}{x} \quad , \quad N = 2 \ln 3x + \frac{3}{y} \quad \text{بافتراض أن :}$$

$$\int^x M dx = x^3 + 2y \ln x$$

$$\int^y N dy = 2y \ln 3x + 3 \ln y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx = 2 \ln x \Rightarrow \int^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx \right) dy = 2y \ln x$$

$$x^3 + 2y \ln x + 2y \ln 3x + 3 \ln y - 2y \ln x = C \quad \text{ويكون حل المعادلة هو :}$$

$$x^3 + 2y \ln 3x + 3 \ln y = C \quad \text{أى أن}$$

حيث C ثابت اختياري .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y(2x+y) dx + (3x^2 + 4xy - y) dy = 0$$

الحل :

$$M = y(2x+y) \quad , \quad N = 3x^2 + 4xy - y \quad \text{ليكن :}$$

$$M_y = 2x + 2y \quad , \quad N_x = 6x + 4y \quad \text{فإن}$$

$$M_y - N_x = -4x - 2y = -2(2x+y) \neq 0 \quad \text{وبالتالى :}$$

أى أن المعادلة المعطاة غير تامة .

نوجد عامل التكامل I

نجد أن

$$\text{دالة في } y \text{ فقط فيكون : } \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2(2x+y)}{-y(2x+y)} = \frac{2}{y}$$

$$I = I(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^2} = y^2$$

بضرب طرفي المعادلة في y^2 تصبح تامة على الصورة :

$$y^3 (2x+y) dx + y^2 (3x^2 + 4xy - y) dy = 0$$

$$M = 2xy^3 + y^4, \quad N = 3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3 \quad \text{ونفترض أن}$$

وعلى ذلك فإن

$$\int^x M dx = x^2 y^3 + xy^4 + xy^4, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx = 3x^2 y^2 + 4xy^3$$

$$\therefore \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \int^x M dx \right) dy = x^2 y^3 + xy^4$$

$$\int^y N dy = x^2 y^3 = xy^4 - \frac{1}{4} y^4$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$x^2 y^3 + xy^4 + x^2 y^3 + xy^4 - \frac{1}{4} y^4 - x^2 y^3 - xy^4 = C$$

$$x^2 y^3 + xy^4 - \frac{1}{4} y^4 = C \quad \text{أى أن :}$$

٥- المعادلات التفاضلية الخطية

تعريف

المعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته في المعادلة من الدرجة الأولى .

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكون :

$$\frac{dy}{dx} + P'(x)y = Q(x) \quad (I)$$

وتسمى خطية في y .

والمعادلة من الرتبة الأولى خطية في x على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y)$$

ولإيجاد حل للمعادلة (I) ، نضعها على الصورة :

$$[P(x)y - Q(x)] dx + dy = 0$$

ونحاول أن نجعلها تامة ، فنفترض :

$$\begin{aligned} M &= P(x)y - Q(x) & , & & N &= 1 \\ M_y &= P(x) & & & N_x &= 0 \\ M_y - N_x &= P(x) \neq 0 \end{aligned}$$

أى أن المعادلة غير تامة ، ونجد أن :

$$I = I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int P(x) dx}$$

وهو عامل التكامل (عامل المكاملة) .

بضرب طرفي المعادلة في $I(x)$ تصبح تامة .

$$e^{\int P(x) dx} P(x)y dx + e^{\int P(x) dx} dy = e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

$$d[e^{\int P(x) dx} y] = e^{\int P(x) dx} Q(x) dx \quad \text{أى أن :}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على حل المعادلة على الصورة :

$$e^{\int P(x) dx} y = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + C$$

حيث C ثابت التكامل .

$$I(x)y = \int I(x) Q(x) dx + C \quad \text{ويمكن تبسيط شكل الحل كما يلي :}$$

$$I(x) = e^{\int P(x) dx} \quad \text{حيث :}$$

ويمكن استنتاج صورة حل المعادلة الخطية

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y)$$

ويكون حلها هو :

$$I(y)x = \int I(y) \beta(y) dy + K$$

$$I(y) = e^{\int \alpha(y) dy} \quad \text{حيث } K \text{ ثابت التكامل ، وعامل التكامل هو :}$$

مثال :

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3 \quad \text{أوجد حل المعادلة :}$$

الحل :

المعادلة خطية في y .

نضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x^2 \quad (2) \quad \text{أى أن}$$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = x^2$$

$$1) \quad \int P(x) dx = \int \frac{2}{x} dx = \ln x^2 \quad \text{نوجد}$$

$$\therefore I(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$2) \quad \int \mu(x) Q(x) dx = \int x^2 x^2 dx = \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو :

$$I y = \int I Q dx + C$$

$$x^2 y = \frac{1}{5} x^5 + c \quad \text{أى أن :}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$(y + y^2) dx - (y^2 + 2xy + x) dy = 0$$

ثم أوجد الحل الخاص الذى يحقق أن $y=1$ عندما $x=3$.

الحل :

المعادلة خطية فى x (لماذا ؟)

$$\frac{dx}{dy} + \alpha(y)x = \beta(y) \quad (1)$$

نضع المعادلة على الصورة :

بقسمة طرفي المعادلة على $(y+y^2) dy$ نحصل على :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y^2 + 2xy + x}{y + y^2} = 0 \quad \text{أى أن}$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2y+1}{y+y^2} x = \frac{y^2}{y+y^2} \quad (2)$$

بمقارنة (2) , (1) نجد أن :

$$\alpha(y) = -\frac{2y+1}{y^2+y}, \quad \beta(y) = \frac{y^2}{y^2+y} = \frac{y}{y+1}$$

$$I(y) = e^{-\int \frac{2y+1}{y^2+y} dy} = e^{-\ln(y^2+y)} = e^{\ln\left(\frac{1}{y^2+y}\right)} = \frac{1}{y^2+y}$$

$$\int I(y) \beta(y) dy = \int \frac{1}{y^2+y} \cdot \frac{y}{y+1} dy = \int \frac{1}{(y+1)^2} dy = -\frac{1}{y^2+1}$$

$$I(y)x = \int I(y) \beta(y) dy + C \quad \text{ويكون حل المعادلة هو}$$

$$\frac{1}{y^2+y} x = -\frac{1}{y+1} + C \quad \text{أى أن}$$

$$\therefore x = -y + C(y^2+y)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

ولحساب الحل الخاص ، نضع $x=3, y=1$ فنحصل على :

$$3 = -1 + 2C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$x = -y + 2(y^2+y) \quad \text{ويكون الحل الخاص هو :}$$

$$2y^2 + y = x \quad \text{أو}$$

ملحوظة :

١- عند حل المعادلة الخطية وتعيين المعامل المكامل I يجب أن تكون المعادلة على نفس الصورة المعروفة أى معامل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أو معامل $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ هو الواحد الصحيح .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y' = \frac{y^2}{(1 - 3xy)}$$

الحل :

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - 3xy}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{3x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3}{y}x = \frac{1}{y^2}$$

أى أن

$$I = e^{\int \frac{3}{y} dy} = \ln y^3 = y^3$$

ويكون المعامل المكامل هو :

ويكون الحل العام هو :

$$Ix = \int I Q dy + C$$

$$y^3 x = \int \frac{1}{y^2} y^3 dy + C = \frac{y^2}{2} + C$$

حيث C ثابت اختياري .

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y}x = 4y + 3$$

الحل :

المعادلة المعطاة خطية في x حيث :

$$P(y) = \frac{2}{y}, \quad Q(y) = 4y + 3$$

المعامل المكامل I هو :

$$I = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$I x = \int I Q dy + C$$

$$\begin{aligned} y^2 x &= \int y^2 (4y + 3) dy + C \\ &= y^4 + y^3 + C \end{aligned}$$

أى أن الحل العام هو :

$$yx = y^2 + y + \frac{C}{y^2}$$

٦- معادلات تفاضلية تؤول إلى خطية :

١- معادلة برنوللى Bernoulli's Equation

تكون المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

حيث $n \neq 0, 1$ تسمى معادلة برنوللى ، n عدد حقيقى .

وهذه المعادلة يمكن أن تتحول إلى معادلة خطية :

١- بالقسمة على y^n نجد أن :

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \quad (1)$$

٢- نفترض أن $y^{-n+1} = z$ ثم باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على :

$$(-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

٣- بضرب طرفى (1) فى $(-n+1)$ والتعويض عن y بدلالة z نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x)$$

٤- نضع $(-n+1)Q(x) = q(x)$ ، $(-n+1)P(x) = p(x)$

تصبح المعادلة على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

وهى معادلة تفاضلية خطية فى z .

٥- حل المعادلة هو :

$$I(x)z = \int I(x)q(x)dx + C$$

٦- ثم باستبدال $z = y^{-n+1}$ ، نحصل على الحل المطلوب :

$$I(x) y^{-n+1} = \int I(x) q(x) dx + C$$

$$I(x) = e^{\int p(x) dx}$$

حيث

مثال :

أوجد حل المعادلة :

$$dy + 2xy dx = xe^{-x^2} y^3 dx$$

الحل :

يمكن وضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2} y^3$$

وهي معادلة برنولي

∴ بالضرب في y^{-3} نحصل على :

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = xe^{-x^2}$$

(1)

بوضع $z = y^{-2}$ نجد أن :

$$-2y^{-3} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

بضرب المعادلة (1) في 2- والتعويض عن y بدلالة z فيكون :

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = 2xe^{-x^2}$$

وهي معادلة خطية على الصورة

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

أى أن : $p(x) = -4x$, $q(x) = -2xe^{-x^2}$

$$\int p(x) dx = -2x^2$$

$$I(x) = e^{-2x^2}$$

$$\begin{aligned} \int I(x) q(x) dx &= \int e^{-2x^2} (-2xe^{-x^2}) dx && \text{فيكون} \\ &= -2 \int xe^{-3x^2} dx = \frac{1}{3} e^{-3x^2} \end{aligned}$$

∴ حل المعادلة على الصورة

$$I(x)z = \int \mu(x) q(x) dx + c$$

$$e^{-2x^2} z = \frac{1}{3} e^{-3x^2} + c \quad \text{أى أن}$$

وحيث أن $z = y^{-2}$ فيكون :

$$e^{-2x^2} y^{-2} = \frac{1}{3} e^{-3x^2} + c$$

$$e^{x^2} y^{-2} = \frac{1}{3} + c e^{3x^2} \quad \text{أو}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y = -2e^x y^2$$

الحل :

المعادلة المعطاة في صورة معادلة برنوللى وبالضرب فى y^2 نحصل على :

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y^{-1} = -2e^x$$

$$-y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \text{نضع } z = y^{-1} \text{ فيكون}$$

بضرب المعادلة في (-1) وبالتعويض عن y بدلالة z تصبح المعادلة على الصورة .

$$\frac{dz}{dx} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)z = 2e^x$$

وهي معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

$$p(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad q(x) = 2e^x \quad \text{حيث}$$

فيكون :

$$\int p(x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln x$$

$$I(x) = e^{x+\ln x} = x e^x$$

$$\begin{aligned} \int I(x) q(x) dx &= \int x e^x 2 e^x dx \\ &= \int 2 x e^{2x} dx \end{aligned}$$

بالتكامل بالتجزئ

$$u = 2x \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = 2 dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int I q dx = x e^{2x} - \int e^{2x} dx = x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I z = \int I q dx + c \quad \text{حل المعادلة}$$

$$x e^{2x} z = e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + c \quad \text{أى أن}$$

حيث أن $z \neq y^{-1}$

$$\frac{x}{y} e^x = e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + c \quad \therefore \text{الحل العام}$$

٢- معادلة ريكاتى Ricatti's Equation

تأخذ معادلة ريكاتى الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (1)$$

حيث P, Q, R دوال فى x فقط .

المعادلة (1) تصبح خطية عندما $P(x) = 0$

كذلك المعادلة (1) تصبح برنوللى عندما $R(x) = 0$

وعلى ذلك فإن معادلة ريكاتى أعم من معادلة برنوللى والمعادلة الخطية ، ولايجاد حل معادلة ريكاتى لابد من أن نعلم حلاً خاصاً وليكن y_1 ، حيث $y_1 = y_1(x)$.

ويكون الحل العام لمعادلة ريكاتى باستخدام التعويض :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$$

بالتعويض فى المعادلة :

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = P(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right)^2 + Q(x) \left(y_1 + \frac{1}{z} \right) + R(x)$$

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = P(x) y_1^2 + 2P(x) y_1 \frac{1}{z} + P(x) \frac{1}{z^2} + Q(x) y_1 + Q(x) \frac{1}{z} + R(x)$$

وحيث أن y_1 حلاً خاصاً للمعادلة فإن :

وبالضرب في z^2 نحصل على :

$$\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx} = 2P(x)y_1 \frac{1}{z} + P(x) \frac{1}{z^2} + Q(x) \frac{1}{z}$$

وبالضرب في z^2 نحصل على :

$$\frac{dz}{dx} + (2P(x)y_1 + Q(x))z = -P(x)$$

وهي معادلة خطية في z تحل كما سبق .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$2x^2 \frac{dy}{dx} = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy$$

حيث $y = x$ حل خاص لها .

الحل :

بالتحقيق نجد أن $y = x$ حلاً للمعادلة :

$$y = x + \frac{1}{z}$$

∴ نفترض أن :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z^2} \frac{dz}{dx}$$

حيث أن المعادلة معادلة ريكاتى

∴ بالتعويض في المعادلة ، نجد أن :

$$2x^2 \left(1 - z^{-2} \frac{dz}{dx} \right) = (x-1) \left[\left(x + \frac{1}{z} \right)^2 - x^2 \right] + 2x \left(x + \frac{1}{z} \right)$$

$$2x^2 - 2 \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{dx} = (x-1) \left(\frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + 2x^2 + \frac{2x}{z}$$

$$\therefore -2 \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{dx} = \frac{2x^2}{z} + \frac{x}{z^2} - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2x}{z}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = -z - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + z = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$$

وهي معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

$$p(x) = 1, \quad q(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right]$$

حيث

$$\int p(x) dx = x \Rightarrow I(x) = e^x$$

$$\int I(x)q(x)dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x} \right) dx$$

نوجد $\int \frac{e^x}{x} dx$ بالتجزئ .

$$u = \frac{1}{x} \quad dv = e^x dx$$

$$du = -\frac{1}{x^2} dx \quad v = e^x$$

$$\begin{aligned} \int I(x)q(x)dx &= \frac{1}{2} \left[\int \frac{e^x}{x^2} dx - \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x^2} dx \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

أى أن حل المعادلة على الصورة :

$$I(x)z = \int I(x) q(x) dx + c$$

$$\therefore e^x z = -\frac{1}{2} \frac{e^x}{x} + c$$

$$\because y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{1}{z} = y - x \Rightarrow z = \frac{1}{y - x}$$

أى أن الحل العام للمعادلة يكون :

$$\frac{e^x}{y - x} = -\frac{1}{2} \frac{e^x}{x} + c$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + xy - 3$$

حيث $y = \frac{1}{x}$ حل خاص لها .

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x} y - \frac{3}{x^2}$$

بوضع المعادلة على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$$

وهى معادلة ريكاتى :

$$\frac{dz}{dx} + (xP(x)y_1 + Q(x))z = -P(x)$$

التي تتحول إلى المعادلة الخطية :

$$P(x) = 1$$

$$Q(x) = \frac{1}{x}$$

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

حيث

$$\frac{dz}{dx} + \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x} \right] z = -1 \quad \text{أى أن}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \quad \text{حيث}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x} z = -1$$

وهى معادلة خطية على الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + P(x)z = q(x)$$

$$p(x) = \frac{3}{x}, \quad q(x) = -1 \quad \text{حيث :}$$

$$\int p(x) dx = \int \frac{3}{x} dx = \ln x^3$$

$$I(x) = e^{\ln x^3} = x^3 \quad \text{وبالتالى فإن :}$$

$$\int I(x)q(x)dx = \int -x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4 \quad \text{وبذلك نحصل على :}$$

$$x^3 z = -\frac{1}{4}x^4 + c \quad \text{أى أن حل المعادلة المعطاة هو :}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \quad \text{وحيث أن :}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{xy-1}{x} \quad z = \frac{x}{xy-1}$$

∴ الحل العام للمعادلة :

$$x^3 \frac{x}{xy-1} = -\frac{1}{4}x^4 + c$$

$$xy-1 = \frac{4x^4}{4c-x^4} \Rightarrow y = \frac{4x^3}{4c-x^4} + \frac{1}{x} \quad \text{أو}$$

٢- المعادلات التفاضلية على الصورة :

$$f'(y) \frac{dy}{dx} + P(x) f(y) = Q(x) \quad (1)$$

حيث $Q(x)$, $P(x)$ دوال في المتغير x و $f(y)$ دالة في المتغير y فقط و $f'(y)$ هو تفاضل الدالة $f(y)$ بالنسبة إلى y .

لحل هذا النوع من المعادلات فإننا نستخدم التعويض

$$z = f(y) \quad (2)$$

ومنها بالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{dz}{dx} = f'(y) \frac{dy}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على :

$$\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x) \quad (3)$$

المعادلة (3) معادلة تفاضلية خطية في z يمكن حلها بإيجاد المعامل المكامل ثم نستخدم التعويض (2) لإيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$e^y \frac{dy}{dx} + e^x = x$$

الحل :

نأخذ التعويض $z = e^y$ ومنها بالتفاضل بالنسبة إلى x نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} = e^y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} + z = x$$

$$z = x e^x - e^x + c$$

$$e^y = e^x (x-1) + c$$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة نجد أن

وهذه معادلة تفاضلية خطية وحلها هو :

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

حيث c ثابت اختياري .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$3x(1-x^2)y^2 \frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y^3 = ax^3$$

حيث a مقدار ثابت .

الحل :

بقسمة طرفى المعادلة على $x(1-x^2)$ نحصل على :

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)} y^3 = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx} \text{ ومنها } z = y^3 \text{ باستخدام التعويض}$$

وبالتعويض فى المعادلة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)} z = \frac{ax^2}{1-x^2}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية .

$$I(x) = e^{\int \frac{2x^2-1}{x(1-x^2)} dx} = e^{\ln \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

ويكون المعامل المكامل هو :

وبذلك يكون الحل هو :

$$\begin{aligned}\frac{z}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{ax^2}{1-x^2} dx + c \\ &= a \int \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx + c \\ &= \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c\end{aligned}$$

ولكن $z = y^3$

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$\frac{y^3}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

حيث c ثابت اختياري .

تمارين

٣) فصل المتغيرات :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائي :

$$1) \quad (x-1)dy + (y-2)dx = 0$$

$$2) \quad 2x(1+y^2)dx - y(1+2x^2)dy = 0$$

$$3) \quad y' - 2y = y^2 \quad ; \quad y=3, x=0$$

$$4) \quad t \frac{dr}{dt} = -2r \quad ; \quad r\left(-\frac{1}{3}\right) = 9$$

$$5) \quad x^3 dy + xy dx = x^2 dy + 2y dx \quad ; \quad y(2) = e$$

$$6) \quad 3e^x \tan y + (1+e^x) \sec^2 y \quad y' = 0 \quad ; \quad y = \frac{\pi}{4}, \quad x = \ln 2$$

$$7) \quad y' + 2x\sqrt{1-y^2} = 0$$

$$8) \quad x^2 e^{x^3-y^2} + yy' = 0 \quad ; \quad y(0) = 0$$

$$9) \quad (1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0 \quad ; \quad y(0) = 1$$

٤) المعادلات المتجانسة :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية ، ثم الحل الخاص إذا أعطى شرط ابتدائي :

$$1) \quad (2x-3y)dx - (2y+3x)dy = 0$$

$$2) \quad ydx + (2x+3y)dy = 0$$

$$3) \quad xy^2 dy - (x^3+y^3)dx = 0$$

$$4) \quad y' = \frac{4x+3y+2}{3x+2y+1}$$

$$5) \quad y' = \frac{-2x+2y}{y-1}$$

$$6) \quad y' = \frac{3y-7x+2}{7x-3y-3}$$

$$7) \quad y' = \frac{x-y-1}{x-y-5}$$

$$8) \quad y' = \frac{x-3y+2}{3x-9y-12}$$

$$9) \quad y' = \frac{2x+2y+1}{x+y-1}$$

$$10) \quad \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) dx - x \sin \frac{y}{x} dy = 0 \quad ; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$11) \quad y(x^2 + xy - 2y^2) dx + x(3y^2 - xy - x^2) dy = 0$$

$$12) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

$$13) \quad y' = \frac{6x-3y+2}{2x-y-1}$$

$$14) \quad y' = \frac{xy}{x^3 - y^2}$$

$$15) \quad y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$$16) \quad xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2} \quad ; \quad y(1) = 0$$

$$17) \quad y' = \frac{3x-2y+4}{2x+7y-1}$$

٥) المعادلات التفاضلية التامة ومعادلات تؤول إلى التامة:

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصا يحقق الشرط الابتدائي (إذا وجد) :

$$1) \quad (3x^2 + 3xy^2) dx - (3y^2 - 2y - 3x^2y) dy = 0$$

- 2) $\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0$
- 3) $y(x-1)^{-1} dx + \left[\ln(2x-2) + \frac{1}{y} \right] dy = 0$
- 4) $2\frac{x}{y} dy + \left(2\ln 5y + \frac{1}{x} \right) dx = 0$
- 5) $ex^2(dy + 2xydx) = 3x^2 dx$
- 6) $y^3 \sin 2x dx - 3y^2 \cos^2 x dy = 0$
- 7) $\frac{3y^2}{x^2 + 3x} dx + \left(2y \ln \frac{5x}{x+3} + 3 \sin y \right) dy = 0$
- 8) $(1-xy)dx - (x^2 - xy)dy = 0$
- 9) $x dy + \cos y (\sin y - 3x^2 \cos y) dx = 0$
- 10) $2xydx - (3x^2 - y^2)dy = 0$
- 11) $(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0$; $y(-1)=1$
- 12) $4xt dx + (4x^2 + 3t) dt = 0$; $x(1)=0$
- 13) $r(t^2 + r^2 + 2t)dt + (t^2 + 3r^2) dr = 0$
- 14) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y) dx + (x^2 y^4 e^y + x^2 y^2 + 3x) dy = 0$

٦) معادلات تفاضلية خطية ومعادلات تفول إلى خطية :

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية، ثم أوجد حلا خاصا يحقق الشرط الابتدائي (إذا وجد) :

- 1) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = x^3 - 3$
- 2) $\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t} x = 2t$.
- 3) $x^2 y' - 2xy = x^4 + 3$; $y(1) = 2$
- 4) $y dx - 4x dy = y^6 dy$; $x(1) = 4$

$$5) \quad t \, ds = (3t+1)s \, dt + t^3 e^{3t} \, dt .$$

$$6) \quad xdy + ydx = 2(x - x^2 y)dx$$

$$7) \quad (1+x^2)y' + xy = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$8) \quad y' + \frac{1}{x-2}y = 5(x-2)\sqrt{y} .$$

$$9) \quad \frac{dx}{dt} + 3t^2 x = x^2 t e^{t^3}$$

$$10) \quad 3dy - ydx = 3y^3 e^{\frac{4x}{3}} dx$$

$$11) \quad (12e^{2x}y^2 - y)dx = dy \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$12) \quad \frac{dx}{dy} - 2xy = ye^{-3y^2} \left\{ xe^{-y^2} + 3(xe^{-y^2})^2 \right\} \quad (xe^{-y^2} = Z \quad \text{استخدم التعويض})$$

$$13) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad \left(y = \frac{1}{x} \text{ حل خاص} \right)$$

$$14) \quad x \frac{dy}{dx} = 2(x-y)^2 + (x-y) + x \quad (y = x \text{ حل خاص})$$

$$15) \quad x^2 \frac{dy}{dx} + xy + x^2 y^2 = 4 \quad \left(y = \frac{-2}{x} \text{ حل خاص} \right)$$

$$16) \quad y' + 2ye^x + y^2 = e^{2x} + e^x \quad (y = e^x \text{ حل خاص})$$

تمارين عامة

أوجد الحل :

1) $x dx - y^2 dy = 0$

2) $y' = y^2 x^3$

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2}{2y}$

4) $dy = 2t(y^2 + 9) dt$

5) $\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y}$; $y(0) = 1$

7) $y' = \frac{y+x}{x}$

8) $y' = \frac{x^4 + 2y^4}{xy^3}$

9) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

10) $(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0$; $y(1) = -2$

11) $(x + \sqrt{xy}) dy - y dx = 0$

12) $2xy dx + (1 + x^2) dy = 0$; $y(1) = -5$

13) $(2y - xe^{xy}) dy - (2 + ye^{xy}) dx = 0$

14) $y^2 dt + (2yt + 1) dy = 0$; $y(1) = -2$

15) $\frac{dx}{dt} = \frac{2x^2(x-1)}{4x^3 + 6x^2t + 2xt^2}$; $x(2) = 3$

16) $xy^2 dx + x^2 y(y+1) dy = 0$

$$17) 2e^{2t} dt + \frac{1+e^{2t}}{x} dx = 0$$

$$18) (\cos x \tan y + x \sin y) dy + (\sec y - \cos y - y \tan y \sin x) dx = 0$$

$$19) 3x^2 y dx + (2x^3 + 4y^2) dy = 0$$

$$20) y' + \frac{4}{x} y = \frac{1}{x^4}$$

$$21) y' + xy = xy^2$$

$$22) y' + \frac{3}{x} y = x^4 \sqrt[3]{y}$$

$$23) y' + \frac{2}{x} y = 0$$

$$24) y' + xy = 6x\sqrt{y}$$

$$25) y' + \frac{2}{x} y = -x^9 y^5 \quad ; \quad y(-1) = 2$$

$$26) \frac{dq}{dt} + q = 4 \cos 2t \quad ; q(0) = 1$$

$$27) \frac{dx}{dt} + 3t^2 x = x^2 te^{t^3}$$

$$28) \frac{dy}{dx} = \cos x - y \sin x + y^2$$

حيث $y = \sin x$ حل خاص

$$29) y' = 2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) y - \frac{1}{2} y$$

حيث $y = x + \frac{1}{x}$ حل خاص

$$30) x(1-x^3)y^3 = x^2 + y - 2xy^2$$

حيث $y = x^2$ حل خاص

$$31) y' = 1 + y^2$$

حيث $y = \tan x$ حل خاص

الباب الثالث

تطبيقات على المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

الباب الثالث

تطبيقات المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

١. المسارات المتعامدة

تعريف :

إذا كان لدينا مجموعة من المنحنيات (1) $F(x, y, c) = 0$ فإن المنحنى (المنحنيات) الذى يقطع تلك المنحنيات على التعامد يسمى مساراً (مسارات) متعامداً ، حيث يصنع ذلك المسار مع كل منحنى من المجموعة (1) زاوية قائمة وللحصول على معادلة ذلك المسار ، نتبع الخطوات الآتية:

١. نوجد مشتقة الطرفين للمعادلة (1) بالنسبة إلى x ، نحصل على المعادلة

$$G(x, y, y', C) = 0 \quad (2)$$

٢. بحذف C من المعادلتين (1) ، (2) ، نحصل على

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

حيث تمثل $f(x, y)$ ميل مجموعة المنحنيات (1).

٣. يكون ميل المسار العمودى $\frac{-1}{f(x, y)}$ ، وعلى ذلك فإن المعادلة التفاضلية للمسار

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)} \text{ العمودى}$$

وذلك فى حالة الإحداثيات الكارتيزية.

٤. بحل المعادلة التفاضلية ، نحصل على معادلة المسار العمودى على الصورة

$$g(x, y, \alpha) = 0$$

حيث α ثابت اختيارى.

مثال :

أوجد المسارات العمودية لمجموعة الدوائر $x^2 + y^2 = C^2$ حيث C بارامتر

الحل :

بتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة إلى x ، نحصل على

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = f(x, y)$$

أى أن

∴ المعادلة التفاضلية للمسار العمودى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$$

بفصل المتغيرات نجد أن

$$\therefore \ln y = \ln x + \ln \alpha$$

بالتكامل نحصل على

$$y = \alpha x \quad \text{حيث } \alpha \text{ ثابت}$$

∴ معادلة المسار العمودى هى

مثال :

أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات

$$a x^2 + y^2 = 2 a c x \quad (1)$$

حيث c بارامتر ، a ثابت

الحل :

بتفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى x .

$$\therefore 2 a x + 2 y y' = 2 a c \quad (2)$$

بضرب طرفي (2) في x

$$\therefore 2 a x^2 + 2 x y y' = 2 a c x \quad (3)$$

من (1) ، (3) يمكن حذف c

$$\therefore 2 a x^2 + 2 x y y' = a x^2 + y^2$$

$$y' = \frac{-a x^2 + y^2}{2 x y} \quad \text{وعلى ذلك النحو نجد أن}$$

نلاحظ أن المعادلة الناتجة تمثل ميل المماس لمجموعة المنحنيات.

وتكون المعادلة التفاضلية للمسارات العمودية على الصورة

$$y' = \frac{2 x y}{a x^2 - y^2}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة.

نفرض $y = vx$ أى أن $y' = vx' + v$

بالتعويض فى المعادلة

$$\therefore xv + v = \frac{2v}{a-v^2}$$

$$\therefore xv = \frac{2v - av + v^3}{a-v^2}$$

$$x \frac{dv}{dx} = \frac{(2-a)v + v^3}{a-v^2}$$

أى أن

بفصل المتغيرات ، نجد أن

$$\frac{(a-v^2)}{(2-a)v + v^3} dv = \frac{dv}{x} \quad (1)$$

أولاً : إذا كانت $\alpha \neq 2$

باستخدام التحويل إلى الكسور الجزئية للطرف الأيسر للمعادلة

$$\frac{(a-v^2)}{v[(2-a)+v^2]} = \frac{A}{v} + \frac{Bv+c}{(2-a)+v^2}$$

$$\therefore a-v^2 = A[(2-a)+v^2] + [Bv+c]v$$

بمساواة الحد المطلق فى الطرفين نجد أن

$$a = A(2-a) \Rightarrow A = \frac{a}{2-a}$$

بمساواة معاملات v^2 في الطرفين نجد أن

$$\therefore -1 = A + B$$

$$\therefore -1 = A + B$$

$$\therefore B = -1 - \frac{a}{2-a} \Rightarrow B = \frac{-2}{2-a}$$

$$\therefore C = 0$$

بمساواة معاملات v في الطرفين نجد أن

وعلى ذلك بتكامل طرفي (I) نحصل على

$$\therefore \frac{a}{2-a} \ln[(2-a) + v^2] = \ln km$$

$$\therefore \frac{v^a}{(2-a) + v^2} = k^{2-a} x^{2-a}$$

نضع $k^{a-2} = c_1$ ، $v = \frac{y}{x}$ فنحصل على

$$\therefore c_1 \left(\frac{y}{x} \right)^a = x^{2-a} \left[(2-a) + \frac{y^2}{x^2} \right]$$

بضرب الطرفين في x^a تكون معادلة المسار العمودي

$$c_1 y^a = (2-a) x^2 + y^2$$

ثانياً : إذا كانت $a = 2$

بالتعويض في (I) نجد أن

$$\therefore \frac{2-v^2}{v^3} dv = \frac{dx}{x}$$

بالتكامل نحصل على

$$\therefore \frac{-1}{v^2} - \ln v = \ln kx$$

$$\frac{-1}{v^2} = \ln kx \quad \text{أى أن}$$

بوضع $v = \frac{y}{x}$ فنجد أن

$$-\frac{x^2}{y^2} = \ln k y$$

وهي تمثل معادلة المسار العمودى فى حالة $a=2$

مثال : (فى حالة الاحداثيات القطبية)

أوجد مجموعة المنحنيات التى تقطع على التعامد مع مجموعة المنحنيات

$$r^2 = a^2 \cos(\theta) \quad \text{حيث } a \text{ باراميترو.}$$

الحل :

بتفاضل طرفى المعادلة بالنسبة إلى θ فإننا نجد أن

$$2r \frac{dr}{d\theta} = -a^2 \sin(\theta)$$

وبحذف a بين المعادلتين نحصل على

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2} r \tan(\theta)$$

بوضع $(-r^2 \frac{dr}{d\theta})$ بدل من $(\frac{dr}{do})$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة تكون

$$2r^2 \frac{d\theta}{dr} = r \tan(\theta)$$

وبفصل المتغيرات والتكامل يكون الحل العام هو

$$r = c \sin^2(\theta)$$

وهذه تمثل مجموعة المنحنيات التى تتقاطع على التعامد مع مجموعة المنحنيات المعطاة.

٢- المسارات غير المتعامدة :

ليكن لدينا المعادلة

$$F(x, y, c) = 0 \quad (1)$$

والتي تمثل عائلة المنحنيات المستوية ذات الباراميتّر c . المنحنى الذى يقطع عائلة المنحنيات (1) بزاوية $90^\circ \neq a$ يسمى مسار غير عمودى لعائلة المنحنيات. (1) بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x و بحذف c بين المعادلة الناتجة والمعادلة (1) نحصل على معادلة تفاضلية على الصورة

$$\frac{dy}{dx} f(x, y) \quad (2)$$

خط تماس عائلة المنحنيات (1) ميله يكون $f(x, y)$ عند النقطة (x, y) وبالتالي فإن زاوية ميله $\tan^{-1}(f(x, y))$ عند النقطة (x, y) . ومن هذا فإن خط التماس للمسار المائل الذى يقطع المنحنيات بزاوية a سيكون له زاوية ميل $\tan^{-1}(f(x, y)) + a$ عند نفس النقطة (x, y) ومن هذا فإن ميل المسار المائل هو

$$\tan [\tan^{-1}(f(x, y)) + a] = \frac{f(x, y) + \tan a}{1 - f(x, y) \tan a}$$

ومن هذا تكون المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات المائلة هي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + \tan a}{1 - f(x, y) \tan a} \quad (3)$$

بحل المعادلة التفاضلية (3) نحصل على معادلة المسارات الغير متعامدة للمعادلة (1) والآن سنعطى مجموعة من الأمثلة المحولة.

مثال :

أوجد المسارات بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على مجموعة الدوائر

$$x^2 + y^2 = c$$

الحل :

من المعادلة $x^2 + y^2 = c$ نجد أن $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ من هذه المعادلة يكون $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ ولكن $a = \frac{\pi}{4}$ وعليه فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة تكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{x}{y} + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 + \frac{x}{y} \tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{y - x}{y + x}$$

أى أن المعادلة هي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى حله هو

$$x^2 + y^2 = c_1 e^{\left(-2 \tan^{-1} \frac{y}{x}\right)}$$

وهذه تمثل عائلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ للمنحنيات المعطاة حيث c_1 ثابت إختياري.

مثال :

أوجد المسارات التي تقطع المستقيمات $y = cx$ بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$

الحل :

من المعادلة $y = cx$ نجد أن $y' = c$ وبحذف c من المعادلتين نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

من هذه المعادلة يكون $f(x, y) = \frac{y}{x}$ ولكن $a = \frac{\pi}{4}$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة تكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{y} + \tan(\frac{\pi}{4})}{1 - \frac{x}{y} \tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{y+x}{x-y}$$

أى أن المعادلة هي $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى والحل العام لها هو

$$\ln(c_1^2 (x^2 + y^2)) - 2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

وهي معادلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على المنحنيات المعطاة حيث c_1 ثابت إختياري.

٣- مسائل النمو والاضمحلال

لنرمز $N(t)$ لكمية المادة أو (مجموع السكان) التي إما أن تكون نامية أو مضمحلة ، إذا فرضنا أن dN/dt (هو معدل التغير الزمنى لهذه الكمية من المادة) تكون متناسبة مع كمية المادة الموجودة ، فإن $dN/dt = kN$ أو

$$\frac{dN}{dt} = kN = 0$$

حيث k ثابت التناسب.

بفرضنا أن $N(t)$ تكون دالة قابلة للاشتقاق وبالتالي فهي متصلة ودالة فى الزمن ، وهذا الافتراض غير صحيح فى مسائل تعداد السكان ، حيث $N(t)$ هى دالة متقطعة وقيمها أعداد صحيحة. وبالرغم من هذا فإن المعادلة $(1-)$ مازالت تعطى تقريبا جيدا للقوانين الفيزيائية التى تحكم هذا النظام.

مثال :

يتناسب معدل نمو البكتريا فى مزرعة جرثومية مع عدد العناصر الموجودة بها. لوحظ أنه بعد ساعة واحدة كان للبكتريا 1000 سلالة. وبعد أربع ساعات أصبحت 3000 سلالة. أوجد :

- أ. تعبيرا عن عدد السلالات الموجودة تقريبا عند أى لحظة t .
- ب. عدد السلالات التقريبية الموجودة أصلا.

الحل :

(أ) ليكن $N(t)$ عند عدد السلالات فى اللحظة t . فإن المعادلة

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \quad (1)$$

وهي معادلة خطية قابلة للفصل أى ذات متغيرات منفصلة وكون حلها هو

$$N(t) = ce^{kt} \quad (2)$$

عندما $t = 1$ ، $N = 1000$ يكون $1000 = ce^k$. وعندما $t = 4$ ، $N = 3000$ يكون $3000 =$

ce^{4k} وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة إلى كل من k ، c نحصل على : $K = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.366$

$694, c = 1000 e^{-0.366} =$ وبالتعويض عن قيمتى k ، c فى (1) نحصل

على $N(t) = 694e^{0.366t}$ كتعبير عن عدد السلالات الموجودة عند اللحظة t .

(ب) لمعرفة N عندما $t = 0$ فى المعادلة نحصل على

$$N(0) = 694 e^{(0.366)(0)} = 694$$

مثال :

يتناسب معدل ازدياد تعداد سكان قطر معين مع عدد السكان الذين يعيشون فيه. إذا تضاعف عدد السكان بعد سنتين وأصبح 20.000 بعد ثلاث سنوات. أوجد عدد السكان الذين يعيشون فى القطر فى البداية.

الحل :

ليكن $N(t)$ عدد السكان الذين يعيشون فى القطر عند أى لحظة t . N^0 عدد السكان فى البداية فى هذا القطر. من المعادلة (1) نحصل على

$$N(t) = ce^{kt} \quad (1) \quad \text{والتي حلها} \quad \frac{dN}{dt} - KN = 0$$

عندما $t = 0$ ، $N = N^0$ فإنه ينتج من (1) أن $N^0 = ce^{k(0)}$ ومنه $c = N^0$. وعليه فإن :

(2) $N = N^0 e^{kt}$. عندما $t = 2$ ، $N = 2N^0$ ، بعد التعويض هذه القيمة فى (2) نحصل على

(3) $N = N_0 e^{0.347t}$ ، وعندما $t = 3$ ، $N = 20.000$ ، بتعويض هذه القيم في (3) نحصل على :

$$(4) \quad 20.000 = N_0 e^{(0.347)(3)} = N_0 (2.832) \quad N_0 = 7062$$

٤- مسائل درجة الحرارة

ينص قانون نيوتن للتبريد والذي يطبق تماما في التسخين على أن "معدل التغير الزمنى لدرجة حرارة جسم يتناسب مع الفرق فى درجتى حرارة الجسم والوسط المحيط به". لتكن T هى درجة حرارة الجسم و T_m درجة حرارة الوسط المحيط. فإن معدل التغير الزمنى حرارة الجسم تكون dt/dt ، ويمكن صياغة قانون نيوتن للتبريد على الصورة

$$dT/dt = -k (T - T_m) \quad (1)$$

أو الصورة

$$\frac{dT}{dt} + kT = KT_m \quad (2)$$

حيث k هو ثابت التناسب الموجب. تكون الإشارة السالبة مطلوبة طالما اخترنا k موجبة فى قانون نيوتن لجعل dT/dt سالبة فى عملية التبريد عندما يكون T أكبر من T_m ، و موجبة فى عملية التسخين ، عندما تكون T أقل من T_m .

مثال :

وضع قضيب معدنى درجة حرارته $100^\circ F$ فى حجرة درجة حرارتها ثابتة عند $0^\circ F$. أصبحت درجة حرارة القضيب $50^\circ F$ بعد عشرين دقيقة. أوجد :

أ. الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القضيب إلى $25^\circ F$.

ب. درجة حرارة القضيب بعد عشر دقائق.

الحل :

باستخدام المعادلة (2) مع $T_m = 0$ ، ويكون الوسط هنا هو الحجرة التى لها درجة حرارة ثابتة $0^\circ F$.

وبالتالى يكون لدينا $\frac{dT}{dt} + kt = 0$ والتى يكون حلها $T = e^{-kt}$.

وحيث أن $T = 100$ عندما $t = 0$ (حرارة القضيب الابتدائية هي $100^\circ F$) ، فينتج من (1) $100 = ce^{-k(0)}$ أو $c = 100$. بتعويض هذه القيمة فى (1) ، نحصل على :

$$T = 100e^{-kt} \quad (2)$$

عندما $t = 20$ تكون $T = 50$ ، وبالتالى من (2) $50 = 100e^{-20k}$ ، ومنها $k = \frac{-1}{20} \ln \frac{50}{100} = \frac{-1}{20} (-0.693) = 0.035$. وبتعويض هذه القيمة فى (2) نحصل على درجة حرارة القضيب عند أى لحظة t ، أى

$$T = 100e^{-0.035t} \quad (3)$$

أ. لإيجاد t عندما $T = 25$ بوضع $T = 25$ فى (3) يكون لدينا $25 = 100e^{-0.035t}$ أو $0.035t = \ln \frac{1}{4}$ وبالحل نجد أن $t = 39.6 \text{ min}$.

ب. لإيجاد T عندما $t = 10$. بوضع $t = 10$ فى (3) وبالحل بالنسبة لـ T نجد أن : $T = 100e^{(-0.035)(10)} = 100(0.705) = 70.5^\circ F$

ملاحظة : يجب ملاحظة أن قانون نيوتن يكون متحققا للفروق الصغيرة لدرجات الحرارة ، وعلى ذلك فإن الحسابات السابقة تمثل فقط تقريبا أوليا للوضع الفيزيائى.

مثال :

وضع جسم درجة حرارته $50^{\circ}F$ بالخارج حيث درجة الحرارة $100^{\circ}F$ وكانت درجة حرارة الجسم بعد خمس دقائق هي $60^{\circ}F$ ، أوجد :

أ. الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم إلى $75^{\circ}F$.

ب. درجة حرارة الجسم بعد عشرين دقيقة.

الحل :

باستخدام المعادلة (2) مع $T_m = 100$ ، (الوسط المحيط بالخارج هو الهواء). وبالتالي يكون لدينا $\frac{dT}{dt} + kt = 100k$ وهي معادلة تفاضلية خطية حلها على الصورة:

$$T = e^{-kt} + 100. \quad (1)$$

وحيث أن $T = 50$ أو $t = 0$ ، فينتج من (1) أن $50 = ce^{-k(0)} + 100$ أو $c = -50$. بتعويض هذه القيمة في (1) ، نحصل على :

$$T = 50e^{-kt} + 100 \quad (2)$$

عندما $t = 5$ تكون $T = 60$ ، وبالتالي من (2) $60 = -50e^{-5k} + 100$ ومنها $-40 = -50e^{-5k}$ أو $k = \frac{-1}{5} \ln \frac{40}{50} = \frac{-1}{5} (0.223) = (0.045)$.

وبتعويض هذه القيمة في (2) نحصل على درجة حرارة الجسم عند أي لحظة t على الصورة :

$$T = -50e^{-0.045t} + 100 \quad (3)$$

أ. لإيجاد t عندما $T = 75$ بوضع $T = 75$ فى (3) فيكون لدينا

$$75 = -50e^{-0.045t} + \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad e^{-0.045t} = \frac{1}{2} \quad \text{وبالحل بالنسبة إلى } t \text{ نجد أن } -0.045t = \ln \frac{1}{2}$$
$$t = 15.4 \text{ min}$$

ب. لإيجاد T عندما $t = 20$ بوضع $t = 20$ فى (3) وبالحل بالنسبة إلى T نجد أن :

$$T = -50e^{(-0.045)(20)} + 100 = -50(0.41) + 100 = 79.5^\circ$$

٥- مسائل الجسم الساقط

اعتبر جسما كتلته m ساقطا رأسيا متأثر فقط بالجاذبية الأرضية g ومقاومة الهواء التى تتناسب مع سرعة الجسم ، نفترض أن كلا من الجاذبية الأرضية والكتلة يبقيان ثابتان. وللمواءمة ، نختار الاتجاه الرأسى إلى أسفل هو الاتجاه الموجب.

قانون نيوتن الثانى للحركة

القوى المحصلة المؤثرة على جسم تساوى المعدل الزمنى لتغير كمية الحركة أو للكتلة الثابتة ،

$$F = m \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

حيث F هى القوى المحصلة على الجسم و v هى سرعة الجسم ، كلاهما عند الزمن t .

فى المسألة التى لدينا توجد قوتان تؤثران على الجسم (1) قوة الجاذبية المعطاة بوزن الجسم W والتى تساوى mg و (2) قوة مقاومة الهواء معطاة بـ $-kv$ ، حيث $k \geq 0$ هو ثابت التناسب. والإشارة السالبة تكون مطلوبة لأن اتجاه هذه القوة عكس اتجاه السرعة التى

تؤثر رأسيا إلى أعلى في الاتجاه السالب وتكون بالتالى القوى المحصلة F على الجسم هي $F = mg - kv$ بتعويض هذه النتيجة فى (3) نحصل على $mg - kv = m \frac{dv}{dt}$ أو

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad (4)$$

كمعادلة الحركة للجسم. إذا أهملنا مقاومة الهواء أو كانت غير موجودة ، فإن $k = 0$ وعلى ذلك فإن المعادلة (4) تبسط إلى :

$$\frac{dv}{dt} = g \quad (5)$$

السرعة النهائية v_1 عندما $k > 0$ تعرف بالمعادلة:

$$v_1 = \frac{mg}{k} \quad (6)$$

تحذير : تكون المعادلات (4) ، (5) ، (6) متحققة فقط إذا تحققت الشروط المعطاة. لا تتحقق هذه المعادلات إذا كانت ، مثل ، مقاومة الهواء لا تتناسب مع السرعة مع مربع السرعة ، أو إذا أخذ الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب.

مثال :

أسقط جسم كتلته 5 رطل من ارتفاع 100 قدم بسرعة صفرية ، وبفرض عدم مقاومة الهواء ، أوجد

أ. تعبيرا عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ب. موضع الجسم عند أى لحظة t ،

ج. الزمن اللازم لكى يصل الجسم إلى الأرض.

الحل :

أ. حيث أنه لا توجد مقاومة للهواء فإن المعادلة (5-6) تؤول إلى $dv/dt = g$ إلى معادلة تفاضلية خطية ، أو في الصورة التفاضلية وقابلة للفصل ويكون حلها هو $v = gt + c$.
عندما $v = 0, t = 0$ (سرعة الجسم الابتدائية هي الصفر) ، فإن $0 = g(0) + c$ ، $c = 0$. وبالتالي $v = gt$. وبفرض أن $g = 32ft/sec^2$ ، فإن :

$$v = 32t \quad (1)$$

ب. لتكن السرعة هي المعدل الزمني لتغير الإزاحة x . وبالتالي $v = dx/dt$ وعليه فإن المعادلة (1) تؤول إلى $dx/dt = 32t$ وهذه المعادلة التفاضلية خطية وقابلة للفصل ويكون حلها :

$$x = 16t^2 + c_1 \quad (2)$$

ولكن عندما $t = 0$ تكون $x = 0$. وبالتالي $0 = (16)(0)^2 + c_1$ أو $c_1 = 0$ وبتعويض هذه القيمة في (2) ، نحصل على :

$$x = 16t^2 \quad (3)$$

ج. لإيجاد t عندما $x = 100$ ، من (3) نحصل على $2 = \sqrt{(100)(16)} = 2.5 \text{ sec}$.

مثال :

أسقطت كرة من الصلب تزن رطل من ارتفاع 3000 قدم من السكون .

وأثناء سقوطها فإنها تواجه مقاومة الهواء التي تساوى عدداً $8/v$ (بالرطل) حيث هي سرعة الكرة (قدم لكل ثانية) . أوجد :

أ. السرعة النهائية للكرة .

ب. الزمن اللازم لوصول الكرة إلى الأرض .

الحل :

حيث موقع الآن عند $K = 1/8$, $w = 2lb$, $x = 3000 ft$

بفرض أن عجلة الجاذبية g هي $32 ft/sec^2$ ، فيكون لدينا من الصيغة $w = mg$ ،
أن $2 = m(32)$ ، أي أن كتلة الكرة هي $m = 1/6 slug$

وتصبح معادلة (4) على الصورة $\frac{dv}{dt} + 2v = 32$

ويكون حلها هو (1) $v = (t) = ce^{-2t} + 16$. عندما $(t = 0)$ يكون لدينا $v = 0$.

وبالتعويض في (1) ، نحصل على :

$0 = c^{-2(0)} + 16 = c + 16$ ، ومنها نجد أن $c = -16$ ، وتصبح (1) على الصورة :

$$v = (t) = -16e^{-2t} + 16 \quad (2)$$

(أ) من (1) و (2) نجد أن $v \rightarrow 16$ ، $t \rightarrow \infty$ وبالتالي فإن السرعة النهائية هي $16 ft/sec$.

(ب) لإيجاد الزمن الذي تستغرقه الكرة لتصل إلى الأرض ($x = 3000$) ، فإننا نحتاج إلى

تعبير عن موضع الكرة عند أي لحظة t . حيث أن $v = dx/dt$ ، فإنه يمكن كتاب (2)

$$\frac{dx}{dt} = -16e^{-2t} + 16 \quad \text{على الصورة}$$

وبتكامل طرفي المعادلة الخيرة مباشرة بالنسبة إلى t ، فيكون لدينا :

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t + c_1 \quad (3) \quad \text{حيث } c_1 \text{ هو ثابت التكامل .}$$

عندما $t = 0$ ، $x = 0$ وبالتعويض عن هذه القيم في (3) نحصل على :

(3) $c_1 = 8 + c_1 + 16(0) + 8e^{-2(0)}$ ، ومنها نجد أن $c_1 = -8$ ، وتصبح المعادلة (3)
على الصورة

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8 \quad (4)$$

وتصل الكرة إلى الأرض عندما $x(t) = 3000$ ، وبالتعويض عن هذه القيمة في (4) يكون
لدينا $3000 = 8e^{-2t} + 16t - 8$ أو :

$$376 = e^{-2t} + 2t \quad (5)$$

بالرغم أنه لا يمكن حل المعادلة (5) صراحة بالنسبة إلى t ، فإنه يمكن أن نقرب الحل
بالتجربة والخطأ ، وذلك بتعويض قيم مختلفة للزمن t في (5) حتى نصل إلى درجة الدقة
التي نريدها . وبديلاً ، نلاحظ أنه لأي قيمة كبيرة للزمن t ، تجعل الحد الأسى صفراً .

ونحصل جيد في هذه الحالة بأخذ $2t = 376$ وذلك من (5) وتكون $t = 188 \text{ sec}$ وهذه
القيمة للزمن t تجعل الحد الأسى e^{-2t} صفراً (مهملًا) .

تمارين

١. تنمو بكتريا في محلول غذائى بمعدل يتناسب مع عدد العناصر الموجودة. وجد فى البداية ان 250 سلالة بكتريا فى المحلول وأصبحت 800 سلالة بعد سبع ساعات . أوجد
أ. تعبيرا عن عدد السلالات فى المزرعة عند أى لحظة t ،
ب. الزمن اللازم لنمو التكتريا إلى 1600 سلالة.
٢. تنمو بكتريا فى مزرعة بمعدل يتناسب مع عدد العناصر الموجودة. وجد أن فى البداية أن 3000 سلالة زادت بنسبة 20 فى المائة بعد ساعتين . أوجد
أ. تعبيرا عن العدد التقريبى فى المزرعة عند أى لحظة t ،
ب. الزمن اللازم لكى يكون عدد السلالات ضعف الموجودة فى البداية.
٣. ينمو عفن بمعدل يتناسب مع حجمه الموجود . وجد أن ، فى البداية 2 oz من هذا العفن بعد يومين 3 oz . أوجد
أ. حجم العفن الموجود بعد يوم واحد
ب. حجم العفن الموجود بعد يوم عشرة أيام.
٤. وضع جسم درجة حرارته $0^{\circ}F$ فى حجرة حرارتها ثابتة عند $100^{\circ}F$. إذا كانت درجة حرارة الجسم $25^{\circ}F$ بعد عشر دقائق ، أوجد
أ. الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم الى $50^{\circ}F$ ،
ب. درجة حرارة الجسم بعد عشرين دقيقة.
٥. وضع جسم درجة حرارته $0^{\circ}F$ فى حجرة درجة حرارتها ثابتة عند $100^{\circ}F$. إذا أصبحت درجة حرارة الجسم $40^{\circ}F$ بعد 20 دقيقة ، $20^{\circ}F$ بعد 40 دقيقة ، أوجد درجة حرارة الجسم فى البداية.

٦: وضع جسم درجة حرارته $50^{\circ}F$ فى فرن تبقى درجة حرارته ثابتة عند $150^{\circ}F$. إذا أصبحت درجة حرارة الجسم 75° بعد 10 دقائق ، أوجد الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم إلى $100^{\circ}F$.

٧. أسقط جسم كتلته 3 slugs من ارتفاع 500 قدم بسرعة صفر. بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد

أ. تعبيراً عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ب. تعبيراً عن موضع الجسم عند أى لحظة t .

٨. أسقط جسم من ارتفاع 300 قدم بسرعة ابتدائية 30 قدم لكل ثانية. بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد

أ. تعبيراً عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ب. الزمن اللازم للجسم ليصل إلى الأرض.

٩. قذف جسم كتلته رأسيل إلى أعلى فى الهواء بسرعة ابتدائية v_0 .

بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد

أ. معادلة الحركة ،

ب. تعبيراً عن سرعة الجسم عند أى لحظة t ،

ج. الزمن t_m الذى يصل فيه لأقصى ارتفاع ،

د. تعبيراً عن موضع الجسم عند أى لحظة t ،

هـ. أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم .

١٠. أوجد المسارات المتعامدة لكل من

(i) $x - y = 0$

(ii) $y = cx^3$

(iii) $x^2 + y^2 = cx^2$

(iv) $r = a (1 + \sin \theta)$

(vi) $r = a (\sec \theta + \tan \theta)$

١١. أوجد عائلة المسارات المائلة التي تقطع المنحنيات $y^2 = 4ax$ بزواوية قدرها $\pi/4$

١٢. أوجد عائلة المسارات المائلة التي تقطع المستقيم $y = ax$ بزواوية قدرها $\pi/4$

١٣. أوجد عائلة المسارات المائلة التي تقطع المستقيم $x - y = a$ بزواوية قدرها $\pi/4$ ،

حيث α بارامتر .

الباب الرابع

المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجات العليا

الباب الرابع

المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة

الأولى و الدرجات العليا

تعريف : المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى تأخذ الصورة

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

يمكن أن نوضع على الصورة

$$F(x, y, p) = 0$$

حيث $p = \frac{dy}{dx}$ باراميتتر. فإذا كنت درجة p اكبر من الواحد فإن المعادلة التفاضلية في هذه الحالة تكون من الرتبة الأولى والدرجات العليا في الصورة البارامترية ويكون الحل في هذه الحالة دالة في الباراميتتر p .

١ - معادلات تفاضلية على الصورة $F(y) = 0$:

نفترض أن المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$F(y) = 0$$

$$p = y' = \frac{dy}{dx} \text{ حيث}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(y')^3 - (y')^2 - 2y' = 0$$

الحل :

بوضع $y' = p$ فإن المعادلة تأخذ الصورة

$$p^3 - p^2 - 2p = 0$$

ومنها نجد أن

$$P(p-2)(p+1) = 0$$

ومن هذا يكون

$$, p=0 \rightarrow y=c_1$$

$$, p=2 \rightarrow y=2x+c_2$$

$$p=-1 \rightarrow y=-x+c_3$$

ويكون الحل العام هو

$$(y-c_1)(y-2x-c_2)(y+x-c_3)=0$$

وحيث أن المعادلة التفاضلية المعطاة من الرتبة الأولى فإن الحل لابد أن يحتوى على ثابت اختياري واحد فقط. من هذا فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يكون على الصورة

$$(y-c)(y-2x-c)(y+x-c) = 0$$

حيث c ثابت اختياري.

٢- معادلات على الصورة $F(x, y) = 0$:

في هذه الحالة يمكن وضع المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$x = f(y, p) \quad (1)$$

$$\text{حيث } p = \frac{dy}{dx}.$$

بتفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى y فإننا نحصل على

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy} = f_1(y, p, \frac{dp}{dy})$$

ومنها يكون

$$\frac{1}{p} = f_1(y, p, \frac{dp}{dy})$$

وهذه المعادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وهي تحل بإحدى الطرق التي درست فيما سبق ، وبافتراض أن الحل يعطى على الصورة :

$$y = \varphi(p, c) \quad (2)$$

حيث c ثابت اختياري .

وتكون المعادلتان (1) و (2) هما الحل العام للمعادلة التفاضلية في الصورة البارامترية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x = 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6$$

الحل :

حيث أن $\frac{dy}{dx} = p$ فإن المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن وضعها على الصورة

$$x = 3p^4 - p^2 + 6 \quad (2)$$

بتفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى y نحصل على

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = 12p^3 \frac{dp}{dy} - 2p \frac{dp}{dy}$$

ومنها

$$\frac{1}{p} = (12p^3 - 2p) \frac{dp}{dy}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى . بفصل المتغيرات نحصل على

$$dy = (12p^4 - 2p^2) dp$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dy = \int (12p^4 - 2p^2) dp + c$$

أى

$$y = \frac{12}{5} p^5 - \frac{2}{3} p^3 + c \quad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) تمثلان الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة فى الصورة البارامترية حيث c ثابت اختياري.

٣- معادلات على الصورة $F(y, y') = 0$

فى هذه الحالة يمكن وضع المعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = f(x, p) \quad (1)$$

بتفاضل طرفى المعادلة (1) بالنسبة الى x نحصل على

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} = f_1(x, p, \frac{dp}{dx})$$

ومنها

$$p = f_1(x, p, \frac{dp}{dx})$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وهى تحل بإحدى الطرق التى درست ، وبفرض أن الحل يعطى على الصورة

$$x = \psi(p, c) \quad (2)$$

حيث c ثابت اختياري

وتكون المعادلتان (1) ، (2) هما الحل للمعادلة التفاضلية فى الصورة البارامترية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^6 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5$$

الحل :

حيث أن $\frac{dy}{dx} = p$ فإن المعادلة التفاضلية المعطاة يمكن وضعها على الصورة

$$y = p^6 - 3p^3 - 7p^2 - 5 \quad (1)$$

بتفاضل (1) بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = \frac{dy}{dx} = (6p^5 - 9p^2 - 14p) \frac{dp}{dx}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى وبفصل المتغيرات نجد أن

$$dx = (6p^4 - 9p - 14) dp$$

وبالتكامل نحصل على

$$x = \frac{6}{5} p^5 - \frac{9}{2} p^2 - 14p + c \quad (2)$$

حيث c ثابت إختياري.

المعادلتان (1) , (2) تمثلان الحل في الصورة البارامترية للمعادلة المعطاة .

٤- معادلة لاجرانج (Lagrange's equation)

تأخذ معادلة لاجرانج الصورة :

$$y = x f(y') + g(y); \quad f(y') \neq y', \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

بوضع $y' = p$ فإن معادلة لاجرانج تأخذ الصورة

$$y = x f(p) + g(p) \quad (2)$$

بتفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = p = f(p) + x f'(p) \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx}$$

$$; f'(p) = \frac{d(f(p))}{dp}, g'(p) = \frac{d(g(p))}{dp} \quad \text{حيث :}$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى في متغيرين x, p ، تحل كما سبق بافتراض أن الحل يعطى من

$$x = \varphi(p, c) \quad (2)$$

حيث c ثابت اختياري. المعادلتان (1) ، (2) هما حل معادلة لاجرانج التفاضلية في الصورة البارامترية.

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y = 2px + p^3 \quad (1)$$

الحل :

هذه المعادلة لجرانج التفاضلية ؛ بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على

$$p = \frac{dy}{dx} = 2p + 2x \frac{dp}{dx} + 3p^2 \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow -p = (2x + 3p^2) \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} x = -3p$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية في x ويكون عامل التكامل هو :

$$I = I(p) = e^{\int \frac{2}{p} dp} = p^2$$

ويكون الحل هو

$$p^2 x = \int p^2 (-3p) dp + c = -\frac{3}{4} p^4 + c$$

أى أن :

$$x = \frac{-3}{4} p^2 + \frac{c}{p^2} \quad (2)$$

حيث c ثابت اختياري

المعادلتان (1) ، (2) هما حل معادلة لاجرانج التفاضلية في الصورة البارامترية.

٥- **معادلة كليرو (Clairout's equation)** :

تنتج معادلة كليرو كحالة خاصة من معادلة لاجرانج وذلك بوضع $y' = f(y)$ وعلى هذا فإن معادلة كليرو وتأخذ الصورة

$$y = x y' + g(y); \quad p = y' = \frac{dy}{dx}$$

ومن هنا نكتب معادلة كليرو على صورة :

$$y = x p + g(p) \quad (1)$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة الى x نحصل على :

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + g'(p) \frac{dp}{dx};$$

$$g'(p) = \frac{dg(p)}{dp}$$

ومن المعادلة السابقة نحصل على :

$$\frac{dp}{dx} (x + g'(p)) = 0$$

$$\text{ومنها إما } \frac{dp}{dx} = 0 \text{ أو } x + g'(p) = 0$$

وفي حالة ما إذا كان $\frac{dp}{dx} = 0$ فإن $p = c$ حيث c ثابت اختياري. وفي هذه الحالة يكون الحل لمعادلة كلييرو هو

$$Y = xc + f(c)$$

وأیضا فی حالة

$$x + f'(p) = 0$$

(2)

يكون الحل هو المعادلتين (1) ، (2) في الصورة البارامترية وهذا لن نتعرض لدراسته في هذا الباب.

وببساطة يمكن الحصول على الحل العام لمعادلة كلييرو بوضع c - ثابت اختياري - بدلا من y' في المعادلة المعطاة.

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y = xy' + \sqrt{4 + y'^2}$$

الحل :

بافتراض أن c ثابت اختياري فيكون الحل العام لمعادلة كلييرو المعطاة هو

$$y = xc + \sqrt{4 + c^2}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$y = xp + 2p^2 + 3p - 1 + e^p$$

الحل :

هذه المعادلة يمكن وضعها على الصورة :

$$y = xp + (2p^2 + 3p + e^p - 1)$$

وهذه تأخذ شكل معادلة كلييرو التفاضلية وبافتراض أن c ثابت اختياري فإن الحل للمعادلة المعطاة هو

$$y = xc + (2c^2 + 3c + e^c - 1)$$

تمارين

أوجد الحل العام في الصورة البارامترية للمعادلات التفاضلية الآتية حيث $y' = p$:

$$(1) \quad x = y'(y'2' + 1) \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad y = (y' - 1)e^{y'}$$

$$(3) \quad y = \log(1 + y^2)$$

$$(4) \quad p^2 - xp + y = 0$$

$$(5) \quad y^2 p^2 + 3xp - y = 0$$

$$(6) \quad p^2 + p - 6 = 0$$

$$(7) \quad p^3 + p = e^y$$

$$(8) \quad x + yp^2 = p(1 + xy)$$

$$(9) \quad p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$$

$$(10) \quad (y')^7 - 3(y')^3 + 16 = 0$$

$$(11) \quad (y')^8 + 7(y')^6 + 2(y')^5 - 12 = 0$$

$$(12) \quad x = p^3 - p + 2$$

$$(13) \quad x^2 p^2 - xyp - 6y^2 = 0$$

$$(14) \quad x + p^2 = 1$$

$$(15) \quad p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$(16) \quad y = 3y' + \sqrt{1 + y'^2}$$

$$(17) \quad y = (1 + y')x + y^2$$

$$(18) \quad y = p^2 x + p$$

$$(19) \quad p = \tan\left(x - \frac{p}{p^2 + 1}\right)$$

الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

الباب الخامس

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا

١- مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية في المتغير y (المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ من الدرجة الأولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

حيث $a_0 \neq 0$

فإذا كانت جميع المعاملات a_0, a_1, \dots, a_n قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات معاملات ثابتة ، اما اذا كانت واحدة على الاقل من المعاملات دالة في x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ في المعادلة (1)

ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x) \neq 0$ فان المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلي D :

نعرف $D \equiv \frac{d}{dx}$ أى المشتقة الأولى بالنسبة إلى x .

كذلك فإن :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}, \dots, \dots, \dots, \quad D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

$$D e^{3x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$$

مثال

$$D^2 e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2} e^{3x} = 9e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر D :

$$1) \quad D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$$

$$2) \quad D[kf(x)] = kDf(x)$$

$$3) \quad F(D) e^{\alpha x} = F(\alpha) e^{\alpha x} \quad ; \quad F \text{ كثيرة حدود فى } D$$

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

حيث نجد ان

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

دالة كثيرة حدود فى D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D) y = f(x)$$

وهى معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

فهى معادلة خطية متجانسة .

وسوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية .

٢- خواص حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

نفترض أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (I)$$

نظرية :

إذا كان كل من y_1, y_2 حل خاص للمعادلة (I) فإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حل أيضاً للمعادلة (I) ، حيث c_1, c_2 ثابتان .

البرهان : يترك للطلاب

تعريف :

$$(١) \quad \text{الحلان } y_1, y_2 \text{ للمعادلة (I) مستقلان خطياً إذا كان (ثابت) } \frac{y_2}{y_1} \neq c$$

$$\text{اى ان } y_2 \neq c y_1$$

$$(٢) \quad \text{الحلان } y_1, y_2 \text{ للمعادلة (I) مرتبطان خطياً إذا كان (ثابت) } \frac{y_2}{y_1} = c$$

$$\text{اى ان } y_2 = c y_1$$

تعريف (الرونسكيان) : Wronskian

إذا كان $y_1(x), y_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فى نطاق تعريفهما ، فإننا نعرف الرونسكيان لهما كما يأتى :

$$W\{y_1(x), y_2(x)\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

تعريف :

(١) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (I) مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان $W\{y_1, y_2\} \equiv 0$.

(٢) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (I) مستقلان خطياً إذا وفقط إذا كان $W\{y_1, y_2\} \neq 0$.

مثال :

ابحث إرتباط واستقلال كل مجموعة من الدوال الآتية :

1) e^x, e^{-x}

2) $1, x, x^2$

3) $e^x, 2e^x, x$

الحل :

1) $W\{e^x, e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

∴ الدالتان مستقلتان خطياً .

$$2) \quad W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

الدوال مستقلة خطياً

$$3) \quad W\{e^x, 2e^x, x\} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

∴ الدوال مرتبطة خطياً .

تعريف : الحل العام :

إذا كان y_1, y_2 حلين مستقلين للمعادلة (I) فإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة (I) ، حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

(I)

حيث a_1, a_2 ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة (I) حيث λ مقدار ثابت .

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$$

نضع المعادلة على الصورة

ثم نعوض بالحل المفروض

$$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نحصل على المعادلة

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) (*Auxiliary characteristic*) ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1, λ_2

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad \text{حيث}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

$$(1) \quad \text{حقيقتان مختلفتان} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 .$$

$$(2) \quad \text{حقيقتان متساويتان} \quad \lambda_1 = \lambda_2 .$$

$$(3) \quad \text{مركبان} .$$

سوف ندرس كل حالة على حده .

(١) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ ، $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 + 3D - 4)y = 0$$

نضع المعادلة على صورة

$$D = \frac{d}{dx} \text{ حيث}$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

فان المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -4 , \lambda = 1$$

اى ان

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$$

يكون الحل العام على صورة

مثال :

$$2y'' - 3y' = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلة

نضع المعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

$$2\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

فان المعادلة المساعدة هي

$$\lambda = 0, \quad \frac{3}{2}$$

و تكون جذورها

ويكون الحل العام صفر

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x} \quad \text{اى ان}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$$

٢) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

اى أن $\lambda_1 = \lambda_2$ فى هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطا بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل آخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

او

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

حيث

مثال :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 - 4D + 4) y = 0$$

نضع المعادلة على صورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

∴ المعادلة المساعدة

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2, 2$$

ويكون جذراها

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

أى أن الحل العام

٣ جذرا المعادلة المميزة مركبان :

إذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فإن الجذر الآخر $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ يكون على صورة $(\lambda_2 = \alpha - i\beta)$ (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فإن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (1)$$

حيث A_1, A_2 ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل (1) على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} [A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}]$$

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x, e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x. \quad \text{ونعلم ان}$$

وعلى ذلك فان

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x} [A_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + A_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)] \\ &= e^{\alpha x} [(A_1 + A_2) \cos \beta x + i(A_1 - A_2) \sin \beta x] \end{aligned}$$

$$A_1 + A_2 = C_1, \quad i(A_1 - A_2) = C_2 \quad \text{ونعتبر}$$

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x] \quad \text{فيكون الحل هو :}$$

مثال :

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{لوجد الحل العام للمعادلة}$$

الحل :

$$(D^2 + 2D + 5)y = 0 \quad \text{نضع المعادلة على صورة}$$

$$\text{نفترض أن } y = e^{\lambda x} \text{ حلا للمعادلة المعطاة}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \therefore \text{ فان المعادلة المساعدة هي}$$

$$\therefore \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

\therefore الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x} [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$$

مثال :

$$y'' + 9y = 0$$

لوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 + 9) = 0$$

نضع المعادلة على صورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

∴ فإن المعادلة المساعدة هي

$$\therefore \lambda = \pm 3i$$

ويكون جذراها

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

٣- حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة

يمكن تعميم الحالات السابقة الخاصة بحل معادلات الرتبة الثانية على المعادلات من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

فتكون المعادلة المساعدة

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

التي نحصل منها على الجذور

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور .

(١) إذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ (أعداداً حقيقية)

فان الحل العام

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

(٢) إذا كانت جميع الجذور حقيقية واحد الجذور مكرر K من المرات

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k$, $\lambda_{k+1} \neq \dots \neq \lambda_n$ فان الحل العام يكون

$$y = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}] e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$$

(٣) إذا كانت الجذور

$$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$$

فانه يوجد

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x]$$

أمثلة عامة

مثال :

أوجد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 0 \quad ; y(0) = 4, y'(0) = 8, y''(0) = -4$$

الحل :

$$(D^3 + 2D^2 - 3D)y = 0$$

نضع المعادلة على الصورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 1, -3 \quad \therefore \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

ويكون الحل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x} \quad (1)$$

ولايجاد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد

$$y' = c_2 e^x - 3c_3 e^{-3x} \quad (2)$$

$$y'' = c_2 e^x + 9c_3 e^{-3x} \quad (3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية في المعادلات (1), (2), (3)

$$\therefore 4 = c_1 + c_2 + c_3 + \dots\dots\dots(4) \quad \Leftarrow \quad (1) \quad y(0) = 4$$

$$8 = c_2 - 3c_3 \dots\dots\dots(5) \quad \Leftarrow \quad (2) \quad y'(0) = 8$$

$$c_2 + 9c_3 \dots\dots\dots(6) \quad \Leftarrow \quad (3) \quad y''(0) = -4 = -4$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 5, \quad c_3 = -1 \quad , \quad \text{بحل المعادلات (4), (5), (6)}$$

$$y = 5e^x - e^{-3x} \quad \text{و يكون الحل على الصورة}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y' - 2y = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, -1, -2$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D - 2)^3(D + 3)^2(D - 4)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$(\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^2(\lambda - 4) = 0$$

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\therefore \lambda = 2, 2, 2, -3, -3, 4$$

ويكون الحل العام

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} + (c_4 + c_5 x) e^{-3x} + c_6 e^{4x}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 0, 0, 1, 1$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^x .$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -6$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)y = 0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, 3, 3$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{3x} \quad (1)$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نوجد

$$y' = 3(c_2 + c_3 x) e^{3x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 9(c_2 + c_3 x) e^{3x} + 3c_3 e^{3x} + 3c_3 e^{3x} \\ &= 3[3(c_2 + c_3 x) e^{3x} + 2c_3 e^{3x}] \end{aligned} \quad (3)$$

بالتعويض في (1), (2), (3) من الشروط الابتدائية .

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2 \quad (4)$$

$$y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3c_2 + c_3 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y''(0) &= -6 \quad \Rightarrow \quad -6 = 3[3c_2 + 2c_3] \\ \Rightarrow \quad -2 &= 3c_2 + 2c_3 \end{aligned} \quad (6)$$

بحل (4), (5), (6) نجد أن

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = -4$$

ويكون الحل الخاص الذي يحقق الشروط

$$y = 2(1 - 2x)e^{3x} - 2$$

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

حيث ان المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليل الطرف الايسر الى عوامل اقل من الدرجة الثالثة ، لذا نستخدم التخمين لحساب الجذور .

من نظرية المعادلات ، للمعادلة جنر حقيقى واحد على الاقل عبارة عن احد عوامل العدد 13 (الحد المطلق) .

$$\therefore L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0 \quad \lambda = 1 \quad \text{نفرض}$$

$$L.H.S. = -1 - 3 - 9 + 13 = 0 = R.H.S \quad \lambda = -1 \quad \text{نفرض}$$

∴ $\lambda = -1$ أحد الجذور $\Leftrightarrow \lambda + 1 = 0$ احد العوامل باستخدام القسمة على العامل $(\lambda + 1)$ نحصل على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0 \quad \therefore \text{تصبح المعادلة المميزة}$$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

$$y = c_1 e^{-x} + e^{2x} [c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x] \quad \text{ويكون الحل العام}$$

٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

نعلم أن المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots, \dots a_0 \neq 0 \quad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة متصلة في نطاق تعريفها.

وباستخدام المؤثر D ، فإن الصورة الرمزية للمعادلة (1)

$$\Phi(D) y = f(x) \quad (2)$$

حيث $\Phi(D)$ دالة كثيرة حدود من درجة n في D ،

$$\Phi(D) = a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (2) نتبع الخطوات الآتية :

(١) نوجد حل المعادلة المتجانسة المناظرة

$$\Phi(D) y = 0$$

وذلك كما سبق دراسته ، ونرمز للحل الناتج بالرمز y_h ، أى أن y_h يحقق المعادلة المتجانسة فقط.

(٢) نوجد حلاً خاصاً نرمز له بالرمز y_p ويحقق المعادلة (2) ، وسوف نعرض لطريقة إيجاد y_p

(٣) نوجد الحل العام y_G حيث $y_G = y_h = y_p$ وبالطبع فإن y_G يحقق المعادلة (2).

$$\Phi(D) y = 0$$

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة

$$\therefore \Phi(D) y_h = 0$$

$$\Phi(D) y = f(x)$$

y_p يحقق المعادلة

$$\therefore \Phi(D) y = f(x)$$

$$\Phi(D) y = f(x)$$

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة

$$\begin{aligned} L.H.S &= \Phi(D) y_G = \Phi(D) [y_h + y_p] = \Phi(D) y_h + \Phi(D) y_p = 0 + f(x) = f(x) \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

طرق إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

المؤثر العكسي:

حيث ان y_p حل يحقق المعادلة $\Phi(D)y = f(x)$

$$\therefore \Phi(D)y_p = f(x)$$

باستخدام التأثير العكسي على الطرفين

$$\frac{1}{\phi(D)} \phi(D)y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

وسوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$ على الدالة $f(x)$ فى صور مختلفة .

(١) إذا كان $f(x) = e^{\alpha x}$.

نعلم ان

$$\phi(D)e^{\alpha x} = \phi(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{\phi(D)} \phi(\alpha)e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(D)} \phi(D)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \phi(\alpha) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

بالقسمة على $\phi(\alpha) \neq 0$

$$\phi(\alpha) \neq 0 \quad , \quad \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} \quad , \quad \phi(\alpha) \neq 0 \quad \text{أى أن}$$

(٢) اذا كان $f(x) = e^{ax} v(x)$

نظم أن

$$\begin{aligned} D[e^{ax} v(x)] &= e^{ax} D v(x) + \alpha e^{ax} v(x) \\ &= e^{ax} (D + \alpha) v(x) \end{aligned}$$

ايضاً

$$\begin{aligned} D^2[e^{ax} v(x)] &= D[e^{ax} (D + \alpha) v(x)] \\ &= e^{ax} [D^2 v(x) + \alpha D v(x)] + \alpha e^{ax} (D + \alpha) v(x) = \\ &= e^{ax} [D + \alpha]^2 v(x) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن

$$D[e^{ax} v(x)] = e^{ax} \phi(D + \alpha) v(x)$$

ومن ذلك ، يمكن اثبات أن

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{ax} v(x) = e^{ax} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\phi(D)$

$$L.H.S. = \phi(D) \frac{1}{\phi(D)} e^{ax} v(x) = e^{ax} v(x)$$

$$R.H.S. = \phi(D) [e^{ax} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)]$$

$$= e^{ax} \phi(D + \alpha) \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)$$

$$= e^{ax} v(x)$$

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x) dx \quad (٣)$$

let $\frac{1}{D} f(x) = z \Rightarrow f(x) = Dz = \frac{dz}{dx}$ الإثبات

$$\therefore z = \int f(x) dx = \frac{1}{D} f(x).$$

$\frac{1}{D}$ التأثير العكسى للمؤثر D ، أى $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة لى x ، بينما $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة إلى x عدد k من المرات .

(٤) إذا كان $f(x)$ دالة كثيرة حدود من درجة n ، وكان $\phi(D)$ تأخذ احدى صور

$$(1+D), (1-D), (1+D)^2, (1-D)^2, \dots$$

$$\therefore \frac{1}{1+D} f(x) = [1 - D + D^2 + \dots + (-1)^n D^n] f(x)$$

$$\frac{1}{1-D} f(x) = [1 + D + D^2 + \dots + D^n] f(x)$$

$$\frac{1}{(1-D)^2} f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \dots + (n+1)D^n] f(x)$$

لو نتبع القسمة المطولة لإيجاد $\frac{1}{\phi(D)}$

٥- إذا كان $f(x) = c$ ، مقدار ثابت .

$$\frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{\Phi(D)} c e^{ax} = c \frac{1}{\Phi(0)} e^{ax} = \frac{c}{\Phi(0)}; \quad \Phi(0) \neq 0$$

$$1) \Phi(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$$

فإذا كان

$$\therefore \Phi(0) = 5$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{c}{\Phi(0)} = \frac{c}{5}$$

$$2) \Phi(d) = D^3 - 2D^2 + 6D \rightarrow \Phi(0) = 0.$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 6D} c = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^2 - 2D + 6} c = \frac{1}{D} \frac{c}{6} = \frac{c}{6} x$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

-٦

فإن

$$\frac{1}{\Phi(D^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

$$D \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$$

نعلم أن

$$D^2 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^2 \sin(\alpha x + \beta)$$

$$D^3 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^3 \cos(\alpha x + \beta)$$

$$D^4 \sin(\alpha x + \beta) = \alpha^4 \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^2 \sin(\alpha x + \beta)$$

ومن ذلك يمكن استنتاج

$$(D^2)^k \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \sin(\alpha x + \beta)$$

وبالمثل نثبت أن

$$(D^2)^k \cos(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \cos(\alpha x + \beta)$$

$$\therefore \Phi(D^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \Phi(-\alpha^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

وعلى ذلك فإن

بأخذ $f(x) = \sin(\alpha x + \beta)$

$$\therefore \Phi(D^2) \sin(\alpha x + \beta) = \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta)$$

$$\frac{1}{\Phi(D^2)}$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر العكسي

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)} \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta) = \sin(\alpha x + \beta)$$

وحيث $\Phi(-\alpha^2)$ مقدار ثابت

$$\therefore \Phi(-\alpha^2) \frac{1}{\Phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \sin(\alpha x + \beta)$$

بالقسمة على $\Phi(-\alpha^2) \neq 0$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \sin(\alpha x + \beta)$$

-٧ من الحالة (١) إذا كان $\Phi(x) = 0$

نضع $v(x) = e^{\alpha x}$ ، $1 = e^{\alpha x}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\Phi(D)} (e^{\alpha x} \cdot 1) = e^{\alpha x} \frac{1}{\Phi(D)} \{1\} \quad \text{من (2)}$$

-٨ من الحالة (٦) إذا كان $\Phi(-\alpha^2) = 0$

في هذه الحالة نضع $\sin(\alpha x + \beta) = I e^{i(\alpha x + \beta)}$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = I \frac{1}{\Phi(D)^2} e^{i(\alpha x + \beta)} I = I e^{i(\alpha x + \beta)} \frac{1}{\Phi(D + i\alpha)^2}$$

٤- أمثلة متنوعة :

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 + 2D - 3)y = 42e^{4x}$$

الحل :

$$(D^2 + 2D - 3)y = 0$$

أولاً : نوجد حل

نفترض أن $y = e^{4x}$ حلاً للمعادلة

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

∴ المعادلة المميزة

$$\therefore (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -3$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً : نوجد حلاً خاصاً y_p ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} 42e^{4x} = 42 \frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42 \frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2e^{4x}$$

$$y_g = y_h + y_p$$

ثالثاً : الحل العام

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

مثال :

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$(D + 4D + 3)y = 8xe^x - 6, \quad y(0) = \frac{-11}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}$$

الحل :

أولاً : نوجد حل المعادلة المتجانسة

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة وتكون المعادلة المميزة هي :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\therefore (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1, -3$$

$$\therefore y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً : نوجد حلاً خاصاً y_p

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4D + 3} [8xe^x - 6] = \frac{1}{(D+1)(D+3)} [8xe^x - 6]$$

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 8xe^x = 8e^x \frac{1}{(D+2)(D+4)} x$$

$$= \frac{8}{(2)(4)} e^x \frac{1}{(1+\frac{D}{2})(1+\frac{D}{4})} x = e^x (1 - \frac{D}{2})(1 - \frac{D}{4}) x$$

$$= e^x (1 - \frac{D}{2})(x - \frac{1}{4}) = e^x [x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} e^x (4x - 3)$$

وكذلك :

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)} 6 = \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{4} e^x (4x - 3) + 2$$

ثالثا : نوجد الحل العام

$$y_G = y_h + y_p$$

$$\therefore y = y_G = y c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x (4x-3) + 2 \quad (1)$$

ولابجد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد :

$$y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x [4 + 4x - 3]$$

$$\therefore y' = -c_1 e^{-x} - 3c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} e^x (4x+1) \quad (2)$$

من (1) ، (2) والشروط الابتدائية

$$y(0) = \frac{-11}{4} \Rightarrow -\frac{11}{4} c_1 + c_2 - \frac{3}{4} - 2 \quad (3)$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{4} \quad (4)$$

بجمع (3) ، (4)

$$\therefore \frac{-10}{4} = -2c_2 - \frac{5}{2} \Rightarrow 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

بالتعويض فى (3)

$$c_1 = -\frac{11}{4} + \frac{11}{4} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y = \frac{1}{4} e^x (4x-3) - 2$$

∴ الحل المطلوب

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - D^2) y = 2 \cos x$$

الحل :

$$(D^3 - D^2) y = 0$$

أولاً : نوجد حل

نجد أن

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{+x}$$

ثانياً : نوجد y_p ، حيث

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2} 2 \cos x = 2 \frac{1}{-D+1} \cos x$$

بالضرب في المرافق $1 + D$

$$\therefore y_p = 2 \frac{1+D}{1-D^2} \cos x = 2 \frac{1+D}{1+1} \cos x = (1+D) \cos x = \cos x - \sin x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{+x} + c_3 e^{-x} + \cos x - \sin x \quad \text{ثالثاً : الحل العام}$$

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - D + 5)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - D + 5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{1 - D} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1 + D}{(1 - D^2)} \{\sin 2x\} = \frac{1 + D}{5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) \end{aligned}$$

أى أن

$$y_p = \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right) + \frac{1}{5} (\sin 2x + \cos 2x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

وفي المثال التالي سنناقش الحل عندما يكون $\phi(-\alpha^2) = 0$.

مثال :

$$(D^2 + 4)y = \sin 2x$$

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + 4)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = A \cos 2x + B \sin 2x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

للحل الخاص y_p يعطى من

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \{\sin 2x\}$$

واضح أن $\phi(-m^2) = \phi(-4) = 0$ في هذه الحالة فإننا نستخدم الطريقة التالية :

$$e^{\alpha} = \cos x + i \sin x$$

من نظرية دي موافر نجد أن :

أى أن

$$\text{الجزء الحقيقي} = \cos x = \text{Re.}(e^{ix})$$

$$\text{الجزء التخيلي} = \sin x = \text{Im.}(e^{ix})$$

وعلى هذا فإن

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \text{Im.}\{e^{2ix}\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{(D + 2i)^2 + 4} \{1\}$$

$$y_p = \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{D^2 + 4iD - 4 + 4} \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{D^2 + 4iD} \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{4iD} \left(1 + \frac{D}{4i}\right)^{-1} \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \frac{1}{4iD} \left(1 - \frac{D}{4i} + \dots\right) \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \left(-\frac{1}{4i} + \frac{1}{16} + \dots\right) \{1\}$$

$$= \text{Im.} e^{2ix} \cdot \left(\frac{x}{4i} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= \text{Im.} (\cos 2x + i \sin 2x) \cdot \left(-\frac{x}{4}i + \frac{1}{16}\right)$$

$$y_p = \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x.$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

من هذا المثال يمكن إثبات أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + 4)y = \cos 2x$$

هو

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{1}{16} \cos 2x + \frac{x}{4} \sin 2x.$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

$$9- \text{ إذا كانت } F(x) \text{ على الصورة } F(x) = \begin{cases} \cosh mx \\ \sinh mx \end{cases}$$

في هذه الحالة فإننا نستخدم الحالة (٦) حيث :

$$\frac{1}{\phi(D^2)} = \begin{cases} \cosh mx \\ \sinh mx \end{cases} = \frac{1}{\phi(m^2)} = \begin{cases} \cosh mx \\ \sinh mx \end{cases}$$

بشرط أن $\phi(m^2) \neq 0$.

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^4 - 8D^2 - 9)y = 50 \sinh 2x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^4 - 8D^2 - 9)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^4 - 8\lambda^2 - 9 = 0$$

$$(\lambda^2 - 9)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda^2 + 1) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 3, \lambda = -3, \lambda = \pm i$$

ومنها الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^4 - 8D^2 - 9} \{50 \sinh 2x\} \\ &= \frac{50 \sinh 2x}{16 - 32 - 9} = \frac{50 \sinh 2x}{-25} \end{aligned}$$

$$y_p = -2 \sinh 2x.$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - 2 \sinh 2x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D' - I)y = 10 \cos x \cdot \cosh x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D' - I)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي .

$$\lambda' - 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - I)(\lambda^2 + I) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = \pm i$$

ومنها الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D' - I} \{10 \cos x \cdot \cosh x\}$$

$$= \text{Re.} \frac{10}{(D^2 - I)(D^2 + I)} \{e^{ix} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}\}$$

$$= 5 \cdot \text{Re.} \frac{1}{(D^2 - I)(D^2 + I)} \{e^{(1+i)x} + e^{(i-1)x}\}$$

$$\begin{aligned} &= 5. \operatorname{Re} . \left[\frac{e^{(1+i)x}}{((1+i)^2 - 1)((1+i)^2 + 1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{((i-1)^2 - 1)((i-1)^2 + 1)} \right] \\ &= 5. \operatorname{Re} . \left[\frac{e^{(1+i)x}}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{(-2i-1)(-2i+1)} \right] \\ &= 5. \operatorname{Re} . \left[\frac{e^x e^{ix}}{-5} + \frac{e^{-x} e^{ix}}{-5} \right] \\ &= -\operatorname{Re} . (e^x + e^{-x}) e^{ix} \\ &= -\operatorname{Re} . 2 \cosh x (\cos x + i \sin x) \\ &= -2 \cosh x . \cos x \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - 2 \cosh x . \cos x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-1)^2(D+1)y = -2e^x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-1)^2(D+1)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)} \{-2e^x\}$$

$$= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)} \{e^x\}$$

$$= \frac{-2e^x}{2(D+1-1)^2} \{1\}$$

$$= -e^x \frac{1}{D^2} \{1\} = -\frac{1}{2} x^2 e^x$$

$$y_p = -\frac{1}{2} x^2 e^x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x - \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D-2)y = 3e^x(x+1)$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D-2)y=0$$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda-2=0$$

ومنها $\lambda=2$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{D-2} \{3e^x(x+1)\}$$

$$= 3e^x \frac{1}{D+1-2} \{x+1\}$$

$$= -3e^x \frac{1}{1-D} \{x+1\}$$

$$= -3e^x (1-D)^{-1} \{x+1\}$$

$$= -3e^x (1+D+\dots) \{x+1\}$$

$$= -3e^x (x+1+1)$$

$$y_p = -3(x+2)e^x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} - 3(x+2)e^x.$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$D^2(D^2 + 4)y = 96x^2$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$D^2(D^2 + 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\lambda = 0, 0, \quad \lambda = \pm 2i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2(D^2 + 4)} \{96x^2\} \\ &= \frac{96}{4} \frac{1}{D^2} \left(1 + \frac{D^2}{4}\right)^{-1} \{x^2\} \\ &= 24 \frac{1}{D^2} \left(1 - \frac{D^2}{4} + \frac{D^4}{16} - \dots\right) \{x^2\} \\ &= 24 \left(\frac{1}{D^2} - \frac{1}{4} + \frac{D^2}{16} - \dots\right) \{x^2\} \\ &= 24 \left(\frac{x^4}{12} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = 2x^4 - 6x^2 + 3$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + 2x^4 - 6x^2 + 3$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 50(e^x + \cos 3x)$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضيل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4) = 0$$

بالتحليل نجد أن

$$\lambda = 1, \quad \lambda = \pm 2i$$

وتكون الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{50}{D^3 - D^2 + 4D - 4} \{e^x + \cos 3x\} \\
 &= \frac{50 e^x}{(D+1)^3 - (D+1)^2 + 4(D+1) - 4} \{1\} + \frac{50}{D^3 + 9 + 4D - 4} \{\cos 3x\} \\
 &= \frac{50 e^x}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - D^2 - 2D - 1 + 4D + 4 - 4} \{1\} \\
 &\quad + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{D^3 + 4D + 5} \{e^{3ix}\} \\
 &= \frac{50e^x}{D^3 + 2D^2 + 5D} \{1\} + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{(3i)^3 + 4(3i) + 5} e^{3ix} \\
 &= \frac{50e^x}{5D} \left(1 + \frac{D^2 + 2D}{5}\right)^{-1} \{1\} + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{-27i + 12i + 5} e^{3ix} \\
 &= 10 e^x \left(\frac{1}{D} - \frac{2}{5} + \dots\right) \{1\} + 50 \operatorname{Re} . \frac{1}{5 - 15i} e^{3ix} \\
 &= 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + 10 \operatorname{Re} . \frac{1}{1 - 3i} \cdot \frac{1 + 3i}{1 + 3i} e^{3ix} \\
 &= 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + \frac{10}{10} \operatorname{Re} . (1 + 3i)(\cos 3x + i \sin 3x)
 \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + 10 e^x \left(x - \frac{2}{5}\right) + \cos 3x - 3 \sin 3x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - 5D + 6)y = 100 \sin 4x.$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي $\lambda = 2, \lambda = 3$. بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - 5D + 6} \{100 \sin 4x\} \\ &= \frac{100}{-16 - 5D + 6} \{\sin 4x\} \\ &= -20 \operatorname{Im} \cdot \frac{1}{D + 2} \{e^{4ix}\} \\ &= -20 \operatorname{Im} \cdot \frac{e^{4ix}}{D + 4i + 2} \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -20 \operatorname{Im} . \frac{e^{4ix}}{4i+2} \left(1 + \frac{D}{4i+2}\right)^{-1} \{I\} \\
 &= -20 \operatorname{Im} . \frac{e^{4ix}}{4i+2} (1 + \dots) \{I\} \\
 &= -20 \operatorname{Im} . \frac{e^{4ix}}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} \cdot 1 \\
 &= -20 \operatorname{Im} . \frac{(\cos 4x + i \sin 4x)(2-4i)}{20}
 \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = 4 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 4 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ملحوظة :

يمكن إيجاد الحل الخاص بطريقة أخرى

$$\begin{aligned}
 y_p &= -20 \frac{1}{D+2} \{\sin 4x\} \\
 &= -20 \frac{1}{D+2} \cdot \frac{D-2}{D-2} \{\sin 4x\} \\
 &= -20 \frac{D-2}{D^2-4} \{\sin 4x\} \\
 &= -20 \frac{D-2}{-16-4} \{\sin 4x\} \\
 &= (D-2) \{\sin 4x\}
 \end{aligned}$$

$$y_p = 4 \cos 4x - 2 \sin 4x$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D + 1)y = x \sin x.$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D + 1)y = 0.$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -1$$

ومنها

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D+1} \{x \sin x\} \\ &= \text{Im.} \frac{1}{D+1} \{x e^{ix}\} \\ &= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{D+i+1} \{x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{i+1} \left(1 + \frac{D}{i+1}\right)^{-1} \{x\} \\ &= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \left(1 - \frac{D}{1+i} + \dots\right) \{x\} \\ &= \text{Im.} \frac{e^{ix}(1-i)}{2} \left(x - \frac{1}{1+i}\right) \\ &= \text{Im.} \frac{e^{ix}}{2} \cdot \left(x(1-i) - \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) \\ &= \text{Im.} \frac{(\cos x + i \sin x)}{2} (x(1-i) + i) \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = \frac{x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cos x$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + \frac{x}{2} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cos x$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 + m^2)y = a \cos mx + b \sin mx.$$

حيث a, b ثوابت .

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 + m^2)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + m^2 = 0$$

$$\lambda = \pm mi$$

ومنها تكون الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx.$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - m^2} \{a \cos mx + b \sin mx\} \\ &= \frac{a}{D^2 + m^2} \{\cos mx\} + \frac{b}{D^2 + m^2} \{\sin mx\} \\ &= a \operatorname{Re} \cdot \frac{1}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\} + b \operatorname{Im} \cdot \frac{1}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\} \end{aligned}$$

نعتبر الآتى

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + m^2} \{e^{imx}\} &= e^{imx} \cdot \frac{1}{(D + im)^2 + m^2} \{1\} \\ &= e^{imx} \cdot \frac{1}{D^2 + 2imD} \{1\} \\ &= \frac{e^{imx}}{2imD} \left(1 + \frac{D}{2im}\right)^{-1} \{1\} \\ &= \frac{e^{imx}}{2im} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{2im} + \dots\right) \{1\} \\ &= -i \frac{e^{imx}}{2m} \left(x + \frac{i}{2m}\right) \\ &= \frac{-1}{2m} (\cos mx + i \sin mx) \left(ix - \frac{1}{2m}\right) \end{aligned}$$

من هذا نستنتج أن

$$\operatorname{Re}.\left(\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\}\right) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m} + x \sin mx\right),$$
$$\operatorname{Im}.\left(\frac{1}{D^2 + m^2}\{e^{imx}\}\right) = \frac{-1}{2m}\left(x \cos mx - \frac{\sin mx}{2m}\right).$$

من هذا يكون

$$y_p = \frac{a}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m} + x \sin mx\right) - \frac{b}{2m}\left(x \cos mx - \frac{\sin mx}{2m}\right).$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx + \frac{a}{2m}\left(\frac{\cos mx}{2m} + x \sin mx\right) - \frac{b}{2m}\left(x \cos mx - \frac{\sin mx}{2m}\right).$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $y'' - 14y' - 48y = 0$

2. $y'' - 12y' + 27y = 0$

3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

4. $y'' + y' - 2y = 0$

5. $y'' + 2y' + 5y = 0$

6. $y'' + 12y' + 36y = 0$

7. $y'' + 3y' + 4y = 0$

8. $y'' - 2y' + 4y = 0$

9. $y'' + 2y' = 0$

10. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$

11. $y'' + 4y' + 13y = 0$

12. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

13. $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$

14. $4y^{(5)} - 3y''' - y'' = 0$

15. $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$

16. $4y^{(4)} - 23y'' - y' = 0$

17. $y'' - 10y' + 16y = 6$

18. $y'' - 5y' + 6y = 7$

19. $y'' + 4y' + 5y = 10$

20. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$

21. $y'' - 5y' + 6y = 3x$

22. $y'' - y' + y = x^3$

23. $y'' + 4y' + 3y = x$

24. $y'' - y = x^2 + 2$

25. $3y'' + y' - 14y = 2e^x$

26. $y'' - 5y' + 6y = 7e^{4x}$

27. $y'' - y = e^x$

28. $y'' + y' + y = e^{3x} + 5$

29. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

30. $(y'' - 2y)^2 = e^x + xe^{2x}$

31. $(y'' - 2y)^2 = x^2 e^{2x}$

32. $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2} e^{3x}$

33. $y' - y = (x + 3)e^{2x}$
34. $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$
35. $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$
36. $y'' - 6y' + 10y = x^3 e^{3x}$
37. $y'' - 5y' + 6y = 9 \sin 2x$
38. $y'' - 5y' + 6y = 9 \cos 2x$
39. $y'' - 4y = \sin 6x$
40. $y'' + 2y' + y = 3 \cos 4x$
41. $y'' - 2y' + y = xe^x \sin x$
42. $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$
43. $y'' + 4y = \cos 2x$
44. $y'' - y = 3e^{2x} \cos x$
45. $y'' - 2y' - y = e^x \cos x$
46. $y^{(4)} - y = \sin 2x$
47. $y'' - 4y = x^2 e^{3x}$
48. $y'' + 3y' + 2y = x \sin 2x$
49. $y'' + 9y = 4 \sin 3x$
50. $y'' - y = x^2 \sin 3x$
51. $y'' + y = \operatorname{cosec} x$
52. $y'' + 4y = 4 \tan 2x$
53. $y'' + y = \sec x$
54. $y'' - y' - 2y = 10 \cos x$
55. $y'' - 2y' + 3y = x^3 + \sin x$
56. $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} + xe^{2x}$
57. $y'' + y = 3 \cos 2x + 2 \sin 3x$
58. $y'' + 3y' - 4y = \sin 2x$
59. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (e^{2x} + 3)^2$
60. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$
61. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$
62. $y'' + 5y = \sin x + 2 \sin 2x$
63. $y'' - 9y = 3 - 9x^2 + 27x^4$
64. $y'' + 6y' + 5y = 104e^{3x}$
65. $y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$
66. $y'' - 5y' + 6y = 25 \sin 4x$
67. $y'' - 10y' + 25y = x^5 e^{5x}$
68. $y'' + 2y' = 24x$
69. $4y'' + 8y' + 3y = e^{-x} \left(x^2 + \sin \frac{x}{2} \right)$
70. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$
71. $y'' - y' + 5y = \sinh 2x$
72. $y^{(4)} - 8y'' + 9y = 50 \sinh 2x$

$$73. y''' - y'' + 4y' - 4y = 50(e^x + \cos 3x) \quad 74. y^{(5)} - y' = 12e^x + 8e^{-2x} \sinh x$$

$$75. y^{(4)} - 6y'' - 8y' - 3y = 256(x+1)e^{3x} \quad 76. y''' + 4y'' + 4y' = 8e^{-2x}$$

$$77. y^{(4)} - y = 10 \cos x \cosh x \quad 78. y'' - y' + 3y = e^{2x}$$

$$79. y'' - 8y' + 15y = 30 \quad 80. y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$$

$$81. y'' - 3y' + 2y = x^2 \quad 82. 2y'' - y' - y = xe^x$$

$$83. y'' - y' + 5y = \sin 2x \quad 84. y'' + 9y = \sin 3x$$

$$85. y'' + 4y' + 3y = x \quad 86. y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$$

$$87. y'' - 10y' + 9y = (x-2)e^x \quad 88. y'' - 6y' + 9y = x^2 + 2x + 1$$

$$89. y'' - 2y' - 3y = e^{2x} \quad 90. y'' - y' + 5y = \sinh 2x$$

الباب السادس

معادلات تفاضلية

ذات

معاملات متغيرة

الباب السادس

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

سوف ندرس في هذا الباب بعض المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة التي
لهما أهمية خاصة .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

"The differential equation variant coefficient"

تسمى المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) , \quad a_n \neq 0$$

حيث أن كل من $f(x), a_0, a_1, \dots, a_n$ دوال في المتغير المستقل x بمعادلة تفاضلية من
الرتبة النونية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة . بحيث أن $f(x) \neq 0$ أما إذا كان
 $f(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة النونية متجانسة ذات معاملات متغيرة حيث أن كل
من a_0, a_1, \dots, a_n دوال في المتغير المستقل x .

"Euler's differential equation"

١ - معادلة أويلر التفاضلية :

معادلة أويلر التفاضلية من الرتبة الثانية تأخذ الصورة

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

حيث a_2, a_1, a_0 ثوابت .

لحل المعادلة (1) فإننا نستخدم التعويض

$$x = e^t \quad \text{or} \quad t = \ln x$$

وهذا التعويض يحول المعادلة (1) ذات المعاملات المتغيرة إلى معادلة تفاضلية مناظرة ذات معاملات ثابتة كالآتي :

$$\theta = \frac{d}{dt}, \quad D = \frac{d}{dx} \quad \text{نفترض أن}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{بذلك نجد أن}$$

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad \text{أى أن}$$

$$xD = \theta \quad (3) \quad \text{ومنها فإن}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dt} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= \frac{-1}{x^2} \frac{d}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

$$D^2 = \frac{-1}{x^2} \theta + \frac{1}{x^2} \theta^2$$

بذلك يكون

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1) \quad (4) \quad \text{أى أن}$$

من العلاقات (4) ، (3) يمكن بسهولة إثبات أن

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

... ..

$$x^n D^n = \theta(\theta - 1)(\theta - 2) \dots (\theta - n + 1)$$

والآن بالتعويض من المعادلتين (4) و (3) فى المعادلة (1) نجد أن

$$a_1 \theta(\theta - 1)y + a_1 \theta y + a_0 y = f(e')$$

$$(a_1 \theta^2 + (a_1 - a_2) \theta + a_0) y = f(e') \quad \text{ومنها}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته . وبالتالي يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة أويلر التفاضلية (1) كما سنوضح ذلك فى الأمثلة الآتية.

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2 D^2 - 2xD + 2)y = 4x^3$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e'$ ونفترض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) - 2\theta + 2)y = 4e^{3x}$$

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 4e^{3x} \quad \text{ومنها}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

لحل المعادلة المتجانسة

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2} \{4e^{3x}\} \\ &= \frac{1}{3^2 - 3 \times 3 + 2} \cdot 4e^{3x} = 2e^{3x} \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2e^{3x}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + 2x^3$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 2xD - 2)y = 0$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1)(\theta - 2) + 2\theta - 2)y = 0$$

$$(\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2)y = 0$$

ومنها

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة متجانسة ذات معاملات ثابتة .

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

بالتحليل

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

فتكون الجذور هي

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t)$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون للحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + x(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x))$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - 6y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$(\theta(\theta - 1) - 6)y = e^{2t} + e^{-2t}$$

$$(\theta^2 - \theta - 6)y = e^{2t} + e^{-2t} \quad \text{ومنها}$$

$$(\theta^2 - \theta - 6)y = 0 \quad \text{المعادلة المتجانسة هي}$$

$$\text{نفترض أن الحل على الصورة } y = e^{\lambda t} \text{ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة} \\ \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \text{المساعدة هي}$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2 \quad \text{بالتحليل نجد أن الجذور هي}$$

$$y_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - \theta - 6} \{e^{2t} + e^{-2t}\} \\ &= \frac{1}{\theta^2 - \theta - 6} \{e^{2t}\} + \frac{1}{\theta^2 - \theta - 6} \{e^{-2t}\} \\ &= \frac{e^{2t}}{4 - 2 - 6} + \frac{e^{-2t}}{(\theta - 2)^2 - (\theta - 2) - 6} \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} + e^{-2t} \frac{1}{\theta^2 - 5\theta} \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{5}\right)^{-1} \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{5} + \dots\right) \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \left(t + \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \left(t + \frac{1}{5}\right)$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{5} x^{-2} (\ln x + \frac{1}{5})$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 2xD - 2)y = x^2 \log x + x$$

الحل :

بالتعويض عن $x = e^t$ فإننا نحصل على المعادلة ذات المعاملات الثابتة

$$(\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2)y = te^{2t} + e^t$$

كما في مثال (٢) وجدنا أن

$$y_h = c_1 e^t + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t)$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2} \{te^{2t} + e^t\} \\ &= \frac{1}{\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2} \{te^{2t}\} + \frac{1}{\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2} \{e^t\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{e^{2t}}{(\theta+2)^3 - 3(\theta+2)^2 + 4(\theta+2) - 2} \{t\} \\
 &\quad + \frac{e^t}{(\theta+2)^3 - 3(\theta+2)^2 + 4(\theta+2) - 2} \{1\} \\
 &= \frac{e^{2t}}{\theta^3 + 3\theta^2 + 4\theta + 2} \{t\} + \frac{e^t}{\theta^3 + \theta} \{1\} \\
 &= \frac{e^{2t}}{2} \left(1 + \frac{4\theta + 3\theta^2 + \theta^3}{2}\right)^{-1} \{t\} + e^t \frac{1}{\theta} (1 + \theta^2)^{-1} \{1\} \\
 &= \frac{e^{2t}}{2} (1 - 2\theta + \dots) \{t\} + e^t \left(\frac{1}{\theta} - \dots\right) \{1\} \\
 &= \frac{e^{2t}}{2} (t - 2) + te^t
 \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t) + \frac{1}{2} (t - 2) e^{2t} + te^t$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + x(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x)) + \frac{1}{2} (\ln x - 2)x^2 + x \ln x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^3 y''' - 4x^2 y'' + 8xy' - 8y = 4 \ln x$$

الحل :

نفترض أن $x = e^t$ و أن $\theta = \frac{d}{dt}$ وعليه فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1)(\theta - 2) - 4\theta(\theta - 1) + 8\theta - 8)y = 4t$$

$$(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 4t$$

ومنها

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

بالتحليل

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$$

فتكون الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t}$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^3 - 7\theta^2 + 14\theta - 8} \{4t\} \\ &= \frac{4}{-8} \left(1 - \frac{14\theta - 7\theta^2 + \theta^3}{8}\right)^{-1} \{t\} \\ &= \frac{-1}{2} \left(1 + \frac{14}{8}\theta + \dots\right) \{t\} \\ &= \frac{-1}{2} \left(t + \frac{14}{8}\right) \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{4t} - \frac{1}{2} \left(t + \frac{14}{8}\right)$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^4 - \frac{1}{16} (8 \ln x + 14)$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - xy' - 3y = x^5$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) - \theta - 3)y = e^{3t}$$

$$(\theta^2 - 2\theta - 3)y = e^{3t}$$

ومنها

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 2\theta - 3)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

بالتطيل نجد أن الجذور هي

$$y_H = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 2\theta - 3} \{e^{3t}\} \\ &= \frac{1}{25 - 10 - 3} \cdot e^{3t} = \frac{1}{12} e^{3t} \end{aligned}$$

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{12} e^{3t}$$

بذلك يكون الحل هو

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^{-1} + \frac{1}{12} x^3$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 5x^2 + 6$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) + 2\theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

$$(\theta^2 + \theta - 6)y = 5e^{2t} + 6$$

ومنها

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 + \theta - 6)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 + \theta - 6} \{5e^{2t} + 6\} \\ &= 5 e^{2t} \frac{1}{(\theta + 2)^2 + (\theta + 2) - 6} \{1\} + \frac{1}{\theta^2 + \theta - 6} \{6\} \\ &= 5 e^{2t} \frac{1}{\theta^2 + 5\theta} \{1\} - \frac{1}{6} (1 - \frac{\theta + \theta^2}{6})^{-1} \{6\} \\ &= 5 e^{2t} \frac{1}{5\theta} (1 + \frac{\theta}{5})^{-1} \{1\} - (1 - \frac{\theta + \theta^2}{6})^{-1} \{1\} \\ &= e^{2t} \frac{1}{\theta} (1 - \frac{\theta}{5} + \dots) \{1\} - (1 - \dots) \{1\} \\ &= e^{2t} (t - \frac{1}{5}) - 1 \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + e^{2t} (t - \frac{1}{5}) - 1$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-3} + x^2 (\ln x - \frac{1}{5}) - 1$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = \ln x$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + 6\theta + 6)y = t$$

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = t$$

ومنها

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = 0$$

نفترض أن الحل على الصورة $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 + 5\theta + 6} \{t\} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{5\theta + \theta^2}{6}\right)^{-1} \{t\} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{5\theta}{6} + \dots\right) \{t\} \\ &= \frac{1}{6} \left(t - \frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{1}{6} \ln x - \frac{5}{36}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1. $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 2x^2$

2. $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 4x + 6x^3$

3. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = (1 + \frac{1}{x})^2 \log x$

4. $x^2 y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^2}$

5. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \log x$

6. $x^2 y'' + xy' + y = \ln x$

7. $x^2 y'' + 6xy' + 6y = \ln x$

8. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3 \log x$

9. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = (\log x)^2 - \log x^2$

10. $2x^2 y'' + 15xy' - 7y = \sqrt{x}$

11. $x^2 y'' - xy' + 4y = \cos(\log x)$

12. $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' + 8y = 32x^2$

13. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2$

14. $x^2 y'' - xy' = 2$

15. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 2x^3$

16. $x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \log x + 3x$

جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية الآتية :

(1) $x^2 y'' - 6y = \ln x$, $y(1) = \frac{1}{6}$, $y'(1) = \frac{-1}{6}$

(2) $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 2x^3$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 7$

٢- معادلة لاجرانج التفاضلية : "Lagrangels differential equation"

هذه المعادلة تأخذ صورة عامة لمعادلة اويلر التفاضلية السابقة وهي على الصورة

$$F[(ax+b)D]y = f(x)$$

حيث a, b ثوابت ، D هو المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$. وعلى الصورة الخطية تأخذ الصورة

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x)$$

حيث $a_0 \neq 0$ ، ثوابت $a, b, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$

واضح انه عندما نأخذ $a=1, b=0$ فان معادلة لاجرانج تتحول إلى معادلة اويلر التفاضلية . أى أن معادلة اويلر التفاضلية صورة خاصة من معادلة لاجرانج التفاضلية . ولحل معادلة لاجرانج التفاضلية فإننا نستخدم التعويض $z=e^x, z=ax+b$ فتتحول المعادلة إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته وسنوضح ذلك بالأمثلة الآتية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$$

الحل :

باستخدام التعويض $z = 3x+2$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 3 \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 9 \frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$9z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + 9z \frac{dy}{dz} - 36y = 3 \left(\frac{z-2}{3} \right)^2 + 4 \left(\frac{z-2}{3} \right) + 1$$
$$= \frac{1}{3} (z^2 - 4z + 4 + 4z - 8 + 3) = \frac{1}{3} (z^2 - 1)$$

باستخدام التعويض $z = e^t$ وبوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فان

$$(9\theta(\theta-1) + 9\theta - 36)y = \frac{1}{3}(e^{2t} - 1)$$

$$(\theta^2 - 4)y = \frac{1}{27}(e^{2t} - 1)$$

ومنها

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 4)y = 0$$

نفترض ان الحل على صورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$$

وبتحليل نجد ان الجذرين هما

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

الحل الخاص يعطى من

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 4} \left\{ \frac{1}{27} (e^{2t} - 1) \right\} \\
 &= \frac{1}{27} \frac{e^{2t}}{(\theta + 2)^2 - 4} \{1\} + \frac{1}{108} \left(1 - \frac{\theta^2}{4} \right)^{-1} \{1\} \\
 &= \frac{e^{2t}}{27} \frac{1}{(\theta^2 - 4)\theta} \{1\} + \frac{1}{108} \left(1 - \frac{\theta^2}{4} \right) \{1\} \\
 &= \frac{e^{2t}}{108} \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{\theta}{4} \right)^{-1} \{1\} + \frac{1}{108} \\
 &= \frac{e^{2t}}{108} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4} + \dots \dots \dots \right) \{1\} + \frac{1}{108}
 \end{aligned}$$

$$y_p = \frac{e^{2t}}{108} \left(t - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{108} \quad \text{ومنها}$$

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \frac{e^{2t}}{108} \left(t - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{108} \quad \text{بذلك}$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وايضاً $z = 3x + 2$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 (3x + 2)^2 + c_2 (3x + 2)^{-2} + \frac{(3x + 2)^2}{108} \left(\ln(3x + 2) - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{108}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x + 2)^2 y'' + (x + 2) y' - y = x$$

الحل

باستخدام التعويض $z = x + 2$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - y = z - 2$$

وهذه معادلة لويلر التفاضلية .

باستخدام التعويض $z = e^t$ وبوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + \theta - 1)y = e^t - 2$$

$$(\theta^2 - 1)y = e^t - 2$$
 ومنها

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 1)y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

وبالتحليل نجد H الجذرين هما

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

الحل الخاص يعطى من

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 1} \{e^t - 2\} \\ &= \frac{e^t}{(\theta + 1)^2 - 1} \{1\} + (1 - \theta^2)^{-1} \{2\} \\ &= \frac{e^t}{\theta^2 + 2\theta} \{1\} + (1 + \theta^2 \dots\dots\dots) \{2\} \\ &= \frac{e^t}{2} \frac{1}{\theta} (1 + \frac{\theta}{2})^{-1} \{1\} + 2 \\ &= \frac{e^t}{2} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} + \dots\dots\dots \right) \{1\} + 2 \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = \frac{e^t}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) + 2$$

وبذلك يكون الحل

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2} \left(t + \frac{1}{2} \right) + 2$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = x + 2$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

الحل :

نفترض أن $z = 1 + 2x$ فيكون

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dz}, \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$4z^2 \frac{d^2y}{dz^2} - 4z \frac{dy}{dz} + 4y = \frac{1}{2} z - 1$$

وهذه معادلة لويبر التفاضلية .

نفترض أن $z = e^t$ وبوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(4\theta(\theta-1) - 4\theta + 4)y = \frac{1}{2} e^t - 1$$

ومنها

$$(\theta^2 - 2\theta + 1)y = \frac{1}{8} (e^t - 2)$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 2\theta + 1)y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

وبالتحليل نجد أن الجذرين هما

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = (c_1 + c_2 t) e^t$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص هو

$$\begin{aligned} y_P &= \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 1} \left\{ \frac{1}{8} (e^t - 2) \right\} \\ &= \frac{1}{8} \frac{e^t}{(\theta + 1)^2 - 2\theta + 1} \{1\} \frac{1}{4} (1 + (2\theta - \theta^2))^{-1} \{1\} \\ &= \frac{e^t}{8} \frac{1}{\theta^2} \{1\} - \frac{1}{4} (1 - 2\theta + \theta_2 - \dots) \{1\} \\ &= \frac{t^2 e^t}{16} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

وبذلك يكون الحل هو

$$y = (c_1 + c_2 t) e^t + \frac{t^2 e^t}{16} - \frac{1}{4}$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = 2x + 1$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = (c_1 + c_2 \log (2x + 1)) (2x + 1) + \frac{1}{16} (2x + 1) \log^2 (2x + 1) - \frac{1}{4}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(1 + 2x)^2 y'' - 6(1 + 2x)y' + 16y = 8(1 + 2x)^2$$

الحل

نفترض أن $z = 1+2x$ فان

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض فى المعادلة التفاضلية نحصل على

$$4z^2 \frac{d^2y}{dz^2} - 12z \frac{dy}{dz} + 16y = 8z^2$$

وهذه معادلة اويلر التفاضلية .

نفرض ان $z=e^t$ وبوضع $\theta \frac{d}{dt}$ فان

$$(\theta(\theta-1)-3\theta+4)y = 2e^{2t}$$

ومنها

$$(\theta^2 - 4\theta + 4)y = 2e^{2t}$$

وهذه معادلة تفاضلية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 4\theta + 4)y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y=e^{\lambda t}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

المساعدة

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2$$

وبالتحليل نجد أن الجذرين هما

$$y_H = (c_1 + c_2 t) e^{2t}$$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 4\theta + 4} \{2e^{2t}\} \\ &= \frac{2e^{2t}}{(\theta + 2)^2 - 4(\theta + 2) + 4} \{1\} \\ &= 2e^{2t} \frac{1}{\theta^2 + 4\theta + 4 - 4\theta - 8 + 4} \{1\} \\ &= 2e^{2t} \frac{1}{\theta^2} \{1\} \\ &= t^2 e^{2t} \end{aligned}$$

وبذلك يكون الحل هو

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{2t} + t^2 e^{2t}$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = 2x + 1$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = [c_1 + c_2 \ln(2x + 1) + \ln^2(2x + 1)](2x + 1)^2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ملحوظة : توجد طرق لحل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة مثل :

- ١- الصورة القياسية .
- ٢- تغيير البارامترات (الوسائط) إذا علم احد حلول المعادلة المتجانسة المناظرة .
- ٣- تحليل المؤثر .
- ٤- طريقة آبل .
- ٥- استبدال المتغير المستقل .

وهذه الطرق مشروحة بالكامل في الجزء الثاني من الكتاب .

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

$$1) \quad (x+1)^2 y'' + (x+1)y' - y = \log(1+x)^2 + x - 1$$

$$2) \quad (x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = 4 \cos(\log(x+1))$$

$$3) \quad (3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 9$$

$$4) \quad (x-3)^2 y'' + 6(x-3)y' + 12y = 1 + 2x$$

$$5) \quad (x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 4y = (1+x)^3$$

$$6) \quad (x+1)^2 y'' - (x+2)y' - 3y = x$$

$$7) \quad (2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y' - 12y = 6x$$

$$8) \quad (2x-3)^2 y'' - 6(2x-3)y' + 12y = 1 + 2x$$

$$9) \quad (2x+3)^3 y'' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$$

$$10) \quad (3x+2)^2 y'' + 3(3x+2)y' - 36y = 3x^2 + 4x + 1$$

$$11) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$12) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -w^2 y, \quad w = \text{ثابت}$$

$$13) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + 2y \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

$$14) \quad y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \left(1 - \frac{dy}{dx} \right) = 0, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

$$15) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \sin x + x^2 + 2x + 3$$

$$16) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \cos y + y$$

$$17) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 3$$

$$18) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} = 1$$

$$19) \quad x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx}$$

٣- بعض الحالات الخاصة :

سنعرض في هذا الجزء لبعض الحالات الخاصة لمعادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة مستخدما ما درسناه في الفصل الثامن . وتتلخص هذه الطريقة بوضع $\frac{dy}{dx} = p$

$$\text{ويكون } \frac{d^2y}{dx^3} = p \frac{dp}{dy} \text{ أو } \frac{d^2y}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

وتتضح الطريقة من الأمثلة التالية

مثال :

أ. معادلات تفاضلية على الصورة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

ونحل هذه المعادلة بالتكامل المباشر مرتين

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 5$$

الحل

بالتكامل بالنسبة الى x مرتين نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + c_1$$

$$y = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5}{2}x + c_1x + c_2$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x + 2x + 3$$

الحل

بالتكامل مرتين بالنسبة إلى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x^2 + 3x + c_1$$

$$y = -\cos x + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

ب. معادلات تفاضلية على الصورة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)$$

$$\text{نضع } \frac{dy}{dx} = p \text{ ويكون } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} (p) = \frac{d}{dy} p \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

ونعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنحصل على

$$p \frac{dp}{dy} = g(y)$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$p dp = g(y) dy$$

وبالتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2} p^2 = \int g(y) dy$$

وبأخذ الجذر التربيعي والتكامل نحصل على حل المعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y + a$$

حل المعادلة التفاضلية

حيث a عدد ثابت

الحل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} \text{ فيكون } \frac{dy}{dx} = p \text{ نضع}$$

وبالتعويض فى المعادلة نحصل على

$$p \frac{dp}{dy} = y + a$$

ومنها نجد أن

$$p dp = (y + a) dy$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{y^2}{2} + ay + c_1$$

$$p^2 = y^2 + 2ay + 2c_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\frac{dy}{dx} = p = \sqrt{y^2 + 2ay + 2c_1}$$

$$2c_1 = c$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2ay + c}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(y+a)^2 + (c-a^2)}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$x = \sinh^{-1} \left(\frac{y+a}{c_2} \right) + c_3, \quad b = (c - a^2)$$

ومن هنا نحصل على

$$\frac{y+a}{c_2} = \sinh(x - c_3)$$

أى أن

$$y = b \sinh(x - c_3) - a$$

ج. معاملات تفاضلية خالية من x

وتكون على الصورة

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

الحل

$$\text{نضع} \quad \frac{dy}{dx} = p \quad \text{فيكون} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$p \frac{dp}{dy} - 2yp = 0$$

أى أن

$$p \left(\frac{dp}{dy} - 2y \right) = 0$$

ومن هنا نحصل على

إما $p = 0$ وهو مرفوض افتراضاً

$$\frac{dp}{dy} - 2y = 0$$

أو

$$dp = 2y \, dy$$

أى أن

ومن هنا نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = p = y^2 + c$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2 + c}$$

$$x = \frac{1}{c} \tan^{-1} \left(\frac{y}{c} \right) + c_1$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو

$$y = c \tan (cx - c_2)$$

$$c_2 = c_1 c$$

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 0, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

الحل

باستخدام التعويض السابق نحصل على

$$yp \frac{dy}{dp} - p(1+p) = 0, \quad p \neq 0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dp}{1+p} = \frac{dy}{y}$$

ومن ذلك نجد أن

$$\ln(1+p) = \ln y + \ln c_1$$

أي أن

$$1+p = c_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = p = c_1 y - 1$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{c} \int c \frac{dy}{cy-1} = \int dx + c,$$

$$\frac{1}{c} \ln(y-1) = x + \ln c_1$$

ومنها نحصل على

$$y = \frac{1}{c} + \frac{c_2}{c} e^{\alpha x}$$

$$c_2 = c c_1 \text{ حيث}$$

وهو حل المعادلة التفاضلية المعطاة

د. معادلات خالية من y :

وتكون على الصورة

$$f = \left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0$$

$$\text{وفي هذه الحالة نضع } \frac{dy}{dx} = p \text{ فيكون } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

مثال

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 3, \quad x \neq 0$$

حل المعادلة التفاضلية

الحل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = p$$

باستخدام التعويض

$$x \frac{dp}{dx} - p = 3$$

فتؤول المعادلة إلى

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = \frac{3}{x}$$

أى أن (2)

وهى معادلة خطية فى p ويكون المعامل المكامل هى

$$I = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = 1/x$$

ويكون حل المعادلة (2) هو

$$I p = \frac{p}{x} = \int \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{p}{x} = \frac{-3}{x} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = p = cx - 3$$

ومنها

وبالتكامل يكون حل المعادلة التفاضلية (1) هو

$$y = c \frac{x^2}{2} - 3x - c_1$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياران

مثال :

حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' = 6 \ln x$$

$$x \neq 0 \text{ و } (1)$$

الحل :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$, \frac{dy}{dx} = p$$

نضع

فتؤول المعادلة التفاضلية إلى

$$x \frac{dp}{dx} + p = 6 \ln x$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = \frac{6 \ln x}{x}$$

(2)

وهي معادلة خطية في p ويكون المعامل المكامل هو

$$I = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ويكون حل المعادلة (2) هو

$$\begin{aligned} xp &= \int 6 \ln x \, dx + \\ &= 6[x \ln x - x] + c \end{aligned}$$

أي أن

$$\frac{dy}{dx} = p = 6[\ln x - 1] + \frac{c}{x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$y = 6[x \ln x - x] - 6x + c \ln x + c_1$$

حيث c, c_1 ثابتان اختياريان .

تمارين

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

i. $y'' = 6x^2 - 3x + 9$

ii. $y'' - 3x^3 + 5x + 1$

iii. $y'' + 3 \sin x - \cos x + \tan x + 6 \sinh x$

iv. $y'' - 5y = 9$

v. $y'' - 4y y' = 0$ $y'' - 6y' = 2$

vi. $y'' = 4y + 3$

vii. $y y'' - y'(2 + y') = 0$ $y' \neq 0$

viii. $x y'' - y' = 6$

ix. $x y'' - 3y' = 2$

x. $x y'' + y' = 2 \ln x$

الباب السابع

طريقة المعاملات غير المعينة

الباب السابع

طريقة المعاملات غير المعينة

لقد أعطى الحل العام للمعادلة التفاضلية $L(y) = \phi(x)$ على الصورة $y = y_h + y_p$ حيث يرمز y_h إلى حل ما للمعادلة التفاضلية و y_p عندما يكون للمعادلات التفاضلية معاملات ثابتة . سوف نعطى فى هذا الفصل طريقتين للحصول على حل خاص y_p عند معرفة y_h .

١- الصورة المبسطة للطريقة

تستخدم طريقة المعاملات غير المعينة إذا أمكن كتابة الدالة ϕ وكل مشتقاتها بدلالة نفس مجموعة الحلول المتسقة خطيا والتي نرمز لها بـ $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$. نفترض فى البداية أن الحل الخاص يكون على الصورة $y_p(x) = A_1 y_1(x) + \dots + A_n y_n(x)$ حيث A_1, A_2, \dots, A_n ثوابت اختيارية . يمكن إيجاد هذه الثوابت الاختيارية بتعويض الحل المفترض فى المعادلة التفاضلية المعطاة ومساواة معاملات الحدود المتشابهة .

وتوجد عدة صور للدالة $\phi(x)$:

الحالة الأولى:

$\phi(x) = p_n(x)$ كثيرة حدود من درجة n فى x . نفترض أن الحل على الصورة

$$y_p = A_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 \quad (1)$$

حيث A_j ($j = 0, 1, 2, \dots, n$) ثوابت يراد تعيينها .

الحالة الثانية

$\Phi(x) = ke^{\alpha x}$ حيث a, k ثابتان معلومان . نفترض أن الحل على الصورة

$$y_p = Ae^{\alpha x} \quad (2)$$

حيث A ثابت يراد تعيينه.

الحالة الثالثة

$\Phi(x) = k_1 \sin \beta x + k_2 \cos \beta x$ حيث β, k_1, k_2 ثابت معلومة . نفترض أن الحل على الصورة

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad (3)$$

حيث B, A ثابتان يراد تعيينهما .

ملاحظة : نفترض الحل (3) حتى لو كان k_1 أو k_2 صفرا ، لأن مشتقات sines أو cosine على كل من sines, cosines.

٢- تعميمات

إذا كانت $\Phi(x)$ هي ناتج حدود الحالات الثلاثة ، فإننا نأخذ y_p كناتج ضرب الحلول المفروضة وربطهم جبريا بثوابت اختيارية ما أمكن . وعلى وجه خاص ، إذا كانت $\Phi(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ أى ناتج ضرب كثيرة حدود فى دالة أسية ، فإننا نفترض أن

$$y_p = e^{\alpha x} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0) \quad (4)$$

حيث A_1 كما في الحالة الأولى . لما إذا كانت $\Phi(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \sin \beta x$ أي ناتج ضرب كثيرة حدود ودالة أسية وحد يحتوى على \sin أو إذا كان $\Phi(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ أي ناتج ضرب كثيرة حدود ودالة أسية وحد يحتوى على \cos فإننا نفترض أن :

$$y_p = e^{\alpha x} \sin \beta x (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0) + e^{\alpha x} \cos \beta x (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x + B_0) \quad (5)$$

حيث $(j = 0, 1, 2, \dots, n), B_j, A_j$ ثوابت يجب تعيينها . إذا كانت $\Phi(x)$ حاصل جمع (أو فرق) حدود سبق اعتبارها ، فإننا نأخذ y_p ليكون حاصل جمع (أو فرق) الحلول المفترضة المناظرة وربطهم جبريا بثوابت ما أمكن ذلك.

٣- تعديلات

إذا كان أي حد من الحل المفروض ، بغض النظر عن الثوابت الضريبية ، هو أيضا حد في y_h (حل المعادلة المتجانسة) فإنه يجب أن نعدل الحل المفروض وذلك بضربه بـ x^m حيث m هو أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكون ناتج ضرب x^m في الحل المفروض ليس به حدود مشتركة مع y_h .

٤- قيود على الطريقة

عموما إذا كان $\Phi(x)$ ليست واحدة من أنواع الدوال السابق ذكرها أو إذا كانت المعادلة التفاضلية ليست ذات معاملات ثابتة ، فإنه يفضل الطريقة المعطاة في الفصل الحادى عشر .

مثال :

حل المعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

الحل :

الحل المتجانس هو $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ وحيث أن $\Phi(x) = 4x^2$ وهى كثيرة حدود من الدرجة الثانية ، فإنه طبقا للحالة الأولى ، باستخدام (1) ، فإن الحل الخاص يأخذ الصورة:

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad (1)$$

وبالتالى $y'_p = 2A_2 x + A_1$ ، $y'' = 2A_2$ ، وبالتعويض هذه النتائج فى المعادلة التفاضلية ، يكون لدينا

$$2A_2 - (2A_2 x + A_1) - 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) = 4x^2$$

والتي تكافئ :

$$(2A_2) x^2 + (-2A_2 - 2A_1) x + (2A_2 - A_1 - 2A_0) = 4x^2 + (0) x + 0$$

وبمساواة قوى x المتشابهة ، نحصل على

$$2A_2 = 4, A_2 - 2A_1 = 0, \quad 2A_2 - A_1 - 2A_0 = 0$$

بحل هذا النظام ، نجد أن $A_0 = -3, A_2 = -2, A_1 = 2$ وبالتالى تصبح المعادلة (1) على

$$y_p = -2x^2 + 2x - 3$$

ويكون الحل العام هو

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

الحل :

الحل المتجانس هو $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ وحيث أن $\Phi(x) = e^{3x}$ ، وبالتالي نحن بصدد الحالة الثانية حيث $a = 3, k = 1$. وعلى ذلك يكون الحل الخاص على الصورة :
(1) $y_p = A e^{3x}$ ، وبالتالي $y'_p = 3 A e^{3x}$ و $y''_p = 9 A e^{3x}$.

وبتعويض هذه النتائج فى المعادلة التفاضلية ، يكون لدينا

$9 A e^{3x} - 3 A e^{3x} - 2 A e^{3x} = e^{3x}$ أو $4 A e^3 = e^{3x}$ وبلى من ذلك أن $4 A = 1$ أو $A = \frac{1}{4}$ ، وبالتالي تصبح (1) على الصورة $y_p = \frac{1}{4} e^{3x}$. ويكون الحل العام هو :

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x$$

الحل :

الحل المتجانس هو $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ وحيث أن $\Phi(x) = \sin 2x$ ، وبالتالي نحن بصدد الحالة الثالثة حيث $\beta = 2, k_1 = 1, k_2 = 0$. وعلى ذلك يكون الحل الخاص على الصورة : (1) $y_p = A \sin 2x + 4b \cos 2x$ وبالتالي $y'_p = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x$

و $y'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x$. ويتعويض هذه النتائج في المعادلة التفاضلية ، يكون لدينا

$$(-4A \sin 2x - 4B \cos 2x) - (2A \cos 2x - 2B \sin 2x) -$$

$$2(A \sin 2x + B \cos 2x) = \sin 2x$$

والتي تكافئ

$$(-6A + 2b) \sin 2x + (-6B - 2A) \cos 2x = \sin 2x + (0) \cos 2x \quad (2)$$

وبمساواة معاملات الحدود المتشابهة ، نحصل على

$$-2A - 6B = 0, -6A + 2B = 1$$

$$B = 1/20, A = -3/20$$

وبحل هذا النظام ، نجد أن

وبالتالى تصبح العادلة (1) على الصورة:

$$y_p = -\frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

ويكون الحل العام هو :

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{3}{20} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

مثال :

حل المعادلة التفاضلية

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$$

الحل :

الحل المتجانس هو $y_h = c_1e^x + c_2e^{3x}$. وتكون $\Phi(x) = e^{ax} P_n(x)$ ، حيث P_n كثيرة حدود من الدرجة الأولى . باستخدام المعادلة (4) ، نفترض $y_p = e^{-x} (A_1x + A_0)$ وبالتالي

$$y'_p = -A_1xe^{-x} + A_1e^{-x} - A_0e^{-x}$$

$$y''_p = A_1xe^{-x} + A_0e^{-x}$$

$$y'''_p = A_1xe^{-x} + 3A_1e^{-x} - A_0e^{-x}$$

بتعويض هذه النتائج معاملات الحدود المتشابهة ، يكون لدينا

$$-24A_1 = 2, 26A_1 - 24A_0 = 0$$

$$A_0 = -13/144, \quad A_1 = -1/2 \quad \text{ومنها}$$

وتصبح المعادلة (1) على الصورة:

$$y_p = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

ويكون الحل العام هو

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{13}{144}e^{-x}$$

مثال :

حدد صورة الحل الخاص للمعادلة

$$y'' = 9x^2 + 2x - 1$$

الحل :

الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية المتجانسة المصاحبة $y'' = 0$ هي

$$y_h = c_1x + c_0.$$

وحيث أن

$$\Phi(x) = 9x^2 + 2x - 1$$

كثيرة حدود فيكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

لاحظ أن هذا الحل يحتوى على حدود مشتركة ، بغض النظر عن الثوابت الضريبية ، مع y_h ، وعلى وجه خاص حد القوة الأولى والحد الثابت . وبالتالي يجب أن نحدد أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن $(A_2x^2 + A_1x + A_0)x^m$ ليس له حدود مشتركة مع y_h عندما $m = 1$ ، نحصل على :

$$x(A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x$$

هو مازال يحتوى على حد القوة الأولى مشتركا مع y_h . وعندما $m = 2$ نحصل على

$$x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2$$

والذى ليس له حدود مشتركة مع y_h ، وبالتالي ، نفترض تعبيراً على هذه الصورة للحل y_h .

مثال :

حل للمعادلة التفاضلية

$$y'' = 9x^2 + 2x - 1$$

الحل

الحل المتجانس للمعادلة التفاضلية المتجانسة المصاحبة $y'' = 0$ هو

$$y_h = c_1 x + c_0$$

نفترض أن الحل الخاص يكون على الصورة

$$y_p = A_2 x^4 + A_1 x^3 + A_0 x^2 \quad (1)$$

وبتعويض (1) في المعادلة التفاضلية ، نحصل على

$$12 A_2 x^2 - 6 A_1 x + 2 A_0 = 9 x^2 + 2 x - 1$$

حيث

$$A_2 = \frac{3}{4}, \quad A_1 = \frac{1}{3}, \quad A_0 = -\frac{1}{2}$$

وبالتالى فإن (1) تصبح :

$$y_p = \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$y = c_1 x + c_0 + \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2$$

مثال :

حل المعادلة

$$y' - 5y = 2e^{5x}$$

الحل

الحل المتجانس هي $y_h = c_1 e^{5x}$. حيث أن $\Phi(x) = 2e^{5x}$ فإنه ينتج المعادلة (2) أن التخمين للحل الخاص y_p يجب أن يكون $y_p = A_0 e^{5x}$.

لاحظ أن الحل الخاص y_p هو تماما مثل y_h وبالتالي يجب أن نعدل y_p . وبضرب y_p في x ($m=1$) ، نحصل على :

$$y_p = A_0 x e^{5x} \quad (1)$$

وحيث أن هذا التعبير ليس له حدود مشتركة مع y_h ، فإنه يكون مرشحا كحل خاص ، وبالتعويض عن (1) و $y_p' = A_0 e^{5x} + 5A_0 x e^{5x}$ في المعادلة التفاضلية وبعد التبسيط نحصل على $A_0 e^{5x} = 2e^{5x}$ ومنها تكون

$A_0 = 2$ ، وتصبح المعادلة (1) على الصورة $y_p = 2e^{5x}$ ، ويكون الحل العام هو

$$y = (c_1 + 2x)e^{5x}$$

تمارين

بطريقة المعاملات غير المعينة ، أوجد حل المعادلات الآتية :

1) $(D^2 + 2D + 5) y = 12 e^x - 34 \sin 2x$

2) $(D + 1)^2 y = 2e^{-x}$

3) $(D - 2)^2 (D + 3) = 10e^x + 25e^{-3x}$

4) $y'' - 2y' - 3y = 12 x e^{-x}$

5) $y'' + 2y' - 8y = 16x - 12$

6) $(D^2 + 4) y = \sin x + \sin 2x$

7) $(D^2 + 1) y = e^x + 3^x$

8) $(D^2 + 4) y = 8x + 1 - 15e^x$

9) $(D^3 + D) y = 15$

10) $(4D^2 + 4D + 1) = 7e^{-x} + 2$

الباب الثامن

طريقة تغيير البارامترات (الوسائط)

الباب الثامن

طريقة تغيير البارامترات (الوسائط – الثوابت)

Variation of Parameters

١- مقدمة

تستخدم هذه الطريقة بصفة عامة لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة y_H حيث أننا نعتبر الثوابت الاختيارية دوال في المتغير x .

والآن سوف نشرح هذه الطريقة على معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية مع ملاحظة أنه يمكن تطبيقها على المعادلات التفاضلية ذات الرتب الأعلى.

لنفترض أن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية غير المتجانسة .

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (1)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان و $f(x)$ دالة في المتغير المستقل x .

وتكون المعادلة المتجانسة هي

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (2)$$

بافتراض أن حل المعادلة المتجانسة على الصورة

$$y_h = Ay_1 + By_2$$

حيث كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) .

والآن لإيجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية (1) فإننا نعتبر أن كل من A, B دوال في المتغير x ويكون الحل الخاص على الصورة

$$y_p = A(x)y_1 + B(x)y_2 \quad (3)$$

بتفاضل (3) بالنسبة إلى x نحصل على

$$y'_p = Ay'_1 + A'y_1 + By'_2 + B'y_2$$

نختار كل من A, B بحيث أن

$$A'y_1 + B'y_2 = 0 \quad (4)$$

ومنها يكون

$$y'_p = Ay'_1 + By'_2$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = Ay''_1 + A'y'_1 + By''_2 + B'y'_2$$

وبالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على

$$Ay''_1 + A'y'_1 + By''_2 + B'y'_2 + a_1(Ay'_1 + By'_2) + a_2(Ay_1 + By_2) = f(x)$$

ومنها

$$A(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + B(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + A' y_1' + B' y_2' = f(x)$$

وحيث أن كل من y_1, y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) فإن

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 ,$$

$$y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0$$

بذلك يكون

$$A' y_1' + B' y_2' = f(x) \quad (5)$$

وبحل المعادلتين (4) و (5) في الدالتين A, B فأنتنا نحصل على كل منهما وبمعرفتهما نكون قد حلنا على الحل الخاص (3) وبذلك يمكن إيجاد الحل العام

$y_G = y_h + y_p$ للمعادلة التفاضلية (1) . مع ملاحظة أن هذه الطريقة تستخدم بصفة خاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ على إحدى الصور

$$\frac{e^x}{x}, \sec x, \cot x, \tan x, \ln x, \sin^{-1} x, \dots$$

والآن سنقوم بتطبيق هذه الطريقة في الأمثلة الآتية .

٢- أمثلة محلولة :

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

$$\text{حيث } D = \frac{d}{dx} .$$

نفترض أن حل هذه المعادلة على الصورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذري المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 3 , \lambda_2 = 3$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^{3x} + B(x)xe^{3x}$$

حيث $A(x)$, $B(x)$ دالتين في x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = 3Ae^{3x} + A'e^{3x} + B'xe^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

نختار A , B بحيث أن

$$A'e^{3x} + B'xe^{3x} = 0 \quad (1)$$

من هذا يكون

$$y'_p = 3Ae^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = 9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$

بالتعويض عن كل من y''_p , y'_p , y_p في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$9Ae^{3x} + 3A'e^{3x} + 3Be^{3x} + B'e^{3x} + 3B'xe^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x}$$

$$- 18Ae^{3x} - 6Be^{3x} - 18Bxe^{3x} + 9Ae^{3x} + 9Bxe^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

ومنها نجد أن

$$3A'e^{3x} + B'(1 + 3x)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2}$$

أى أن

$$3A' + B'(1 + 3x) = \frac{1}{x^2} \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$A' = -\frac{1}{x}, \quad B' = \frac{1}{x^2}$$

وبالتكامل نجد أن

$$A = -\ln x, \quad B = -\frac{1}{x}$$

بذلك يكون

$$y_p = -e^{3x} \ln x - \frac{1}{x} x e^{3x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A e^{3x} + B x e^{3x} - e^{3x} \ln x - \frac{1}{x} x e^{3x}$$

حيث A, B ثابتان اختياريان.

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$y'' - y = 0$$

بافتراض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

وبالتحليل نجد أن جذرى المعادلة هما :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}$$

بافتراض أن الحل الخاص y_p على الصورة

$$y_p = A(x)e^x + B(x)e^{-x}$$

حيث $A(x), B(x)$ دالتين في x .

بالتفاضل بالنسبة إلى x

$$y'_p = Ae^x + A'e^x - Be^{-x} + B'e^{-x}$$

نختار A, B بحيث أن

$$A'e^x + B'e^{-x} = 0$$

(1)

من هذا يكون

$$y_p' = Ae^x - Be^{-x}$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y_p'' = Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x}$$

بالتعويض عن كل من y_p, y_p', y_p'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$Ae^x + A'e^x + Be^{-x} - B'e^{-x} - Ae^x - Be^{-x} = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها نجد أن

$$A'e^x - B'e^{-x} = \frac{2}{1+e^x} \quad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$2A'e^x = \frac{2}{1+e^x}$$

ومنها وبفصل المتغيرات نجد أن

$$dA = \frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

وبالتكامل نجد أن

$$\begin{aligned}\int dA &= \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dx}{e^x} - \int \frac{dx}{1+e^x} \\ &= -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}\end{aligned}$$

ومنها

$$A = -e^{-x} + \ln(1+e^{-x})$$

وبطرح (2) من (1) نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$\int dB = -\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$B = -\ln(1+e^x)$$

ومنها

بذلك يكون

$$\begin{aligned}y_p &= e^x(-e^{-x} + \ln(1+e^{-x})) - e^{-x} \ln(1+e^x) \\ &= -1 + e^x \ln(1+e^{-x}) - e^{-x} \ln(1+e^x)\end{aligned}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = Ae^x + Be^{-x} - 1 + e^x \ln(1+e^{-x}) - e^{-x} \ln(1+e^x)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = \tan x$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي $y'' + y = 0$

نفترض أن حلها هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

وبالتحليل تكون الجذور هي

$$y_h = A \cos x + B \sin x$$

فيكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_p = A(x) \cos x + B(x) \sin x$$

نفترض أن الحل الخاص y_p على الصورة

حيث $A(x), B(x)$ دوال في x .

$$y'_p = A' \cos x - A \sin x + B' \sin x + B \cos x$$

بالتفاضل بالنسبة إلى x

نختار A, B بحيث أن

$$A' \cos x + B' \sin x = 0$$

(1)

$$y'_p = -A \sin x + B \cos x$$

من هذا يكون

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى x نحصل على

$$y''_p = -A \cos x - A' \sin x - B \sin x + B' \cos x$$

بالتعويض عن كل من y_p, y_p', y_p'' في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$-A \cos x - A' \sin x - B \sin x + B' \cos x + A \cos x + B \sin x = \tan x$$

ومن هنا نجد أن

$$-A' \sin x + B' \cos x = \tan x \quad (2)$$

بضرب المعادلة (1) في $\sin x$ و المعادلة (2) في $\cos x$ وجمع المعادلتين الناتجتين نجد أن

$$B'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \tan x \cdot \cos x$$

ومن هنا

$$B' = \sin x \quad (3)$$

$$B = -\cos x$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$B'e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

وبالتعويض من (3) في (1) نجد أن

$$A' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن

$$dA = -\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$$

ومن هنا

وبالتكامل

$$\begin{aligned} \int dA &= -\int (\sec x - \cos x) dx \\ &= -\int \sec x dx + \int \cos x dx \end{aligned}$$

$$A = -\ln(\sec x + \tan x) + \sin x$$

بذلك يكون الحل الخاص

$$\begin{aligned} y_p &= [-\ln(\sec x + \tan x) + \sin x] \cos x - \cos x \cdot \sin x \\ &= [-\ln(\sec x + \tan x)] \cos x \end{aligned}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A \cos x + B \sin x - [\ln(\sec x + \tan x)] \cos x$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

تمارين

(١) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية باستخدام طريقة تغيير الوسائط (البارامترات)

$$(1) \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$(2) \quad y'' - y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

$$(3) \quad y'' + 4y = 2 \tan x$$

$$(4) \quad y'' + y = \sec x$$

$$(5) \quad y'' + y = \operatorname{cosec} x$$

$$(6) \quad y'' + y = \cot x$$

$$(7) \quad y'' - y = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$(8) \quad y'' + y = \tan^{-1} x$$

(٢) باستخدام طريقة تغيير البارامترات اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

يمكن كتابته على الصورة

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int \sin(\omega(x-t)) \cdot f(t) dt$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

(٣) أوجد الحل العام باستخدام طريقة تغيير البارامترات إذا علم حلان أو x_2 للمعادلة المتجانسة المصاحبة .

i. $x^2 y'' - xy' + y = x^3 e^x$

ii. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \frac{e^t}{t^3}$

iii. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = \frac{e^t}{1+e^t}$

iv. $\frac{d^3 z}{d\theta^3} - 3\frac{d^2 z}{d\theta^2} + 2\frac{dz}{d\theta} = \frac{e^{3\theta}}{1+e^\theta}$

الباب التاسع

تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

الباب التاسع

تطبيقات المعادلات التفاضلية الخطية

من الرتبة الثانية

١ - مسائل الزنبرك

يتكون نظام الزنبرك البسيط من كتلة متصلة بالطرف السفلى لزنبرك معلق رأسياً من مكان مرتفع . يكون النظام في موضع الاتزان عندما يكون في حالة السكون . تبدأ الكتلة الحركة بوسيلة أو أكثر مما يلي : إزاحة الكتلة من موضع اتزانها بإعطائها سرعة ابتدائية أو تعريضها لقوة خارجية $F(t)$.

قانون هوك :

تكون قوة استرداد الزنبرك F مساوية ومضادة للقوى المؤثرة على الزنبرك وتتناسب مع الاستطالة (الانكماش) l للزنبرك كنتيجة للقوة المؤثرة أى أن $F = -kl$ حيث k هو ثابت التناسب ، ويسمى عادة بثابت الزنبرك .

مثال :

علقت كرة من الصلب وزنها 128 lb فى زنبرك فأحدثت استطالة قدرها 2 ft فى طوله الطبيعى . يكون وزن الكرة 128 lb هو القوة المؤثرة المسئولة عن الاستطالة (2 ft) . وبالتالي فإن $F = -128 \text{ lb}$. ومن قانون هوك نجد أن $-128 = -k(2)$ أو $k = 64 \text{ lb/ft}$.

نختار الاتجاه الرأسى إلى أسفل هو الاتجاه الموجب ونأخذ نقطة الأصل هى مركز ثقل الكتلة فى موضع الاتزان وذلك للملاءمة . نفرض أن كتلة الزنبرك تافهة ويمكن إهمالها وأن مقاومة الهواء عند وجودها تتناسب مع سرعة الكتلة . وبالتالي عند أى لحظة t ، توجد ثلاث قوى تؤثر على النظام :

(١) $F(t)$ وتقاس فى الاتجاه الموجب .

(٢) قوة الاسترداد المعطاة بقانون هوك وهى : $F_s = -kx$ ، $k > 0$.

(٣) قوة مقاومة الهواء وتعطى هكذا $F_a = -ax$ ، $a > 0$ حيث a ثابت التناسب .

لاحظ أن قوة الاسترداد F_s تؤثر دائما فى اتجاه بحيث تعيد النظام لموضع الاتزان . إذا كانت الكتلة أسفل موضع الاتزان فإن x تكون سالبة ويكون $-kx$ موجبا ، بينما إذا كانت الكتلة أعلى موضع الاتزان فإن x تكون موجبة ويكون $-kx$ سالبا . نلاحظ أيضا أن قوة مقاومة الهواء F_a تؤثر فى الاتجاه المضاد للسرعة وتعمل على تضاول حركة الكتلة وذلك لأن $a > 0$. وينتج الآن من قانون نيوتن الثانى أن $m\ddot{x} = -kx - ax + F(t)$ أو :

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (1)$$

إذا بدأ النظام الحركة عندما $t = 0$ بسرعة ابتدائية V_0 من موضع ابتدائى x_0 ، فيكون لدينا الشروط الابتدائية :

$$X(0) = x_0 \quad \ddot{x}(0) = V_0 \quad (2)$$

لا تظهر قوة الجاذبية فى المعادلة (1) صراحة ، وعلى الرغم من ذلك نعوض عن هذه القوة بقياس المسافة من موضع اتزان الزنبرك . إذا أردنا النص على قوة الجاذبية صراحة ، فإنه يجب قياس المسافة من الطرف السفلى لطرف الزنبرك الطبيعى . أى أنه يمكن أن تعطى حركة تنذب الزنبرك بالعلاقة :

$$\ddot{x} + \frac{a}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = g + \frac{F(t)}{m}$$

إذا كانت نقطة الأصل ، $x = 0$ هي نقطة نهاية طرف الزنبرك غير المشدود قبل تعلق الكتلة m .

مثال :

علقت كرة من الصلب وزنها 128 lb في زنبرك ، فاستطال الزنبرك 2 ft في طوله الطبيعي . بدأت الكرة الحركة بدون سرعة ابتدائية بإزاحتها 6 in أعلى موضع الاتزان . بإهمال مقاومة الهواء ، أوجد :

(أ) تعبيراً عن موضع الكرة عند أى لحظة t ،

(ب) موضع الكرة عندما $t = \pi/12$.

الحل :

(أ) تعطى معادلة الحركة بالمعادلة (1) . لا توجد قوة خارجية وبالتالي $F(t) = 0$. وبإهمال مقاومة الهواء في الوسط المحيط ، وعليه فإن $a = 0$. تكون الحركة حرة وغير متضائلة ، ويكون لدينا $m = 128 / 32 = 4 \text{ slugs}$ ، $g = 32 \text{ ft/sec}^2$ ، ينتج من المثال الأول أن $k = 64 \text{ lb/ft}$. تصبح المعادلة (1) على الصورة $\ddot{x} + 16x = 0$. ويكون جذرا المعادلة المميزة هما $\lambda = \pm 4i$ ويكون حلها هو :

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t \quad (1)$$

عندما $t = 0$ يكون موضع الكرة هو $x_0 = \frac{1}{2} \text{ ft}$ ، (الإشارة السالبة تكون مطلوبة لأن الكرة في البداية أزيحت أعلى موضع الاتزان ، أى أنها في الاتجاه السالب) . باستخدام الشرط الابتدائي في (1) نجد أن $\frac{1}{2} = x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$ وبالتالي تصبح المعادلة (1) على الصورة :

$$x(t) = -\frac{1}{2} \cos 4t + c_2 \sin 4t \quad (2)$$

وقد أعطينا السرعة الابتدائية وهي $V_0 = 0 \text{ ft/sec}$ بتفاضل (2) نحصل على
 $v(t) = \dot{x}(t) = 2 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t$ وعليه فإن :

$$0 = v(0) = 2 \sin 0 + 4c_2 \cos 0 = 4c_2$$

وبالتالى فإن $c_2 = 0$ ، وتصبح المعادلة (2) :

$$x(t) = -\frac{1}{2} \cos 4t \quad (3)$$

كمعادلة الحركة للكرة عند أى لحظة t :

(ب) عندما $t = \pi/12$ فإن

$$x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2} \cos \frac{4\pi}{12} = -\frac{1}{4} \text{ ft}$$

مثال :

عين التردد الدائرى والتردد الطبيعى والزمن الدورى للحركة التوافقية البسيطة المبينة
فى المثال السابق .

الحل

$$\omega = 4 \text{ cycles / sec.} = 4 \text{ Hz}$$

$$f = 4/2 \pi = 0.6366 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81 \text{ sec}$$

التردد الدائرى

التردد الطبيعى

الزمن الدورى

مثال :

علقت كتلة 2 kg فى زنبرك معلوم ثابتته الزنبركى وهو 10 N/m وبعد أن أصبح فى حالة السكون وضع فى حركة بإعطائه سرعة ابتدائية 150 cm/sec . أوجد تعبيراً عن حركة الكتلة ، بإهمال مقاومة الهواء .

الحل

تعطى معادلة الحركة بالمعادلة (1) وهى تمثل حركة غير متضائلة حرة لأنه لا توجد قوة خارجية مؤثرة على الكتلة ، $F(t) = 0$ ، ولا توجد مقاومة من الوسط المحيط ؛ أن $a = 0$. وقد أعطيت كتلة وثابت الزنبرك أى $k = 10 \text{ N/m}$ ، $m = 2 \text{ kg}$ على الترتيب . وبالتالي تصبح المعادلة (1) على الصورة $\ddot{x} + 5x = 0$. ويكون جذرا المعادلة المميزة تخيليين بحت ، ويكون حلها هو :

$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{5} t + c_2 \sin \sqrt{5} t \quad (1)$$

عندما $t = 0$ ، يكون موضع الكتلة عند موضع الاتزان هو $x_0 = 0$. باستخدام هذا الشرط الابتدائى فى المعادلة (1) ، نجد أن $0 = x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$ ، وتصبح المعادلة (1) على الصورة (2) $x(t) = c_2 \sin \sqrt{5} t$ ، وقد أعطيت السرعة الابتدائية وهى $v_0 = 150 \text{ cm/sec} = 1.5 \text{ m/sec}$ ، وبتفاضل المعادلة (2) ، نحصل على :

$$1.5 = v(0) = \sqrt{5} C_2 \cos 0 = \sqrt{5} C_2 \quad \text{فإن} \quad v(t) = \dot{x}(t) = \sqrt{5} C_2 \cos \sqrt{5} t$$

ومنها $C_2 = \frac{1.5}{\sqrt{5}} = 0.6708$. وتصبح المعادلة (2) على الصورة

$$x(t) = 0.6708 (\sin \sqrt{5} t) \quad (3)$$

وهو موضع الكتلة عند أى لحظة t .

مثال :

علقت كتلة 10 kg في زنبرك فأحدثت استطالة 0.7 m في طوله الطبيعي . بدأت الكتلة الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية 1 m/sec في اتجاه رأسى إلى أعلى . لوجد الحركة التالية إذا كانت قوة مقاومة الهواء هي $-90\dot{x} \text{ N}$.

الحل

بأخذ $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ فيكون لدينا $\omega = mg = 98 \text{ N}$ وعلالة $k = \omega/l = 140 \text{ N/m}$ ، وتصبح المعادلة (1) على تلك تكون $a = 90$ و $F(t) = 0$ (لا توجد قوة خارجية) .

الصورة

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = 0 \quad (1)$$

ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = -7$ وهما جذران حقيقيان ومختلفان ، وهذا مثال لحركة زائدة التضاؤل . ويكون حل المعادلة (1) هو $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-7t}$ ، وتكون الشروط الابتدائية هي $x(0) = 0$ (الكتلة بدأت في الاتجاه السالب) . باستخدام هذين الشرطين نجد أن $C_1 = -C_2 = + \frac{1}{5}$ ، وبالتالي فإن $x = \frac{-1}{5}(e^{-7t} - e^{-2t})$. لاحظ أن $x \rightarrow 0$ عندما $t \rightarrow \infty$ ، وبالتالي هذه الحركة عابرة.

مثال :

اثبت أن أنواع الحركة الناتجة في مسائل الحركة المتضائلة الحرة تتعين تماماً بالمقدار $\alpha^2 - 4 \text{ km}$.

الحل :

يكون للحركة المتضائلة الحرة $F(t) = 0$ ، وتصبح المعادلة (1) على الصورة
 $\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ، ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4km}}{2m}, \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4km}}{2m} .$$

إذا كان $a^2 - 4km > 0$ فإن الجذرين حقيقيان ومختلفان ، وإذا كان $a^2 - 4km = 0$ يكون الجذران متساويين ، أما إذا كان $a^2 - 4km < 0$ فإن الجذرين مركبان مترافقان .
وتكون الحركة المناظرة هي زائدة المضائلة ، مضائلة حرجة ، تذبذبية مخمدة على الترتيب .
وحيث أن الجزء الحقيقي في كل من الجذرين يكون سالبا دائماً فإن الحركة الناتجة في الحالات الثلاثة تكون عابرة . (للحركة زائدة المضائلة ، نحتاج لملاحظة أن $a^2 - 4km < a$ ، بينما في كل من الحالتين الأخيرتين يكون الجزء الحقيقي هو $(-a/2m)$.

مثال :

علقت كتلة 10 kg في زنبرك له الثابت الزنبركي 140 N/m . بدأت الكتلة الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية 1 m/sec في الاتجاه الرأسى إلى أعلى وبقوة مؤثرة خارجية $F(t) = 5 \sin t$. أوجد الحركة الناتجة للكتلة إذا كانت قوة مقاومة الهواء هي $-90\dot{x} \text{ N}$.

الحل

لدينا $F(t) = 5 \sin t$, $m = 10$, $k = 140$, $a = 90$ وبالتالى تصبح معادلة الحركة (1) على الصورة :

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = \frac{1}{2} \sin t \quad (1)$$

ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة المصاحبة $\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x$ ، (أنظر مثال ٤) هو $x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t}$. وباستخدام طريقة المعاملات غير المعنية ، نجد أن :

$$x_p = \frac{13}{500} \sin t - \frac{9}{500} \cos t \quad (2)$$

وبالتالى يكون الحل العام للمعادلة (1) هو :

$$x = x_h + x_p = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500} \sin t - \frac{9}{500} \cos t$$

وباستخدام الشرطين الابتدائيين $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ نحصل على :

$$x = \frac{1}{500} (-90e^{-2t} + 99e^{-7t} + 13 \sin t + 9 \cos t)$$

لاحظ أن الحدود الأسية ناتجة من x_h وبالتالى تمثل حركة حرة زائدة المضائلة المصاحبة وتتلشى بسرعة . وتكون هذه الحدود هى الجزء العابر فى الحل .

والحدود الناتجة من x_p لا تنتهى عندما $t \rightarrow \infty$ وتكون هى جزء حالة الاستقرار فى الحل .

٢- مسائل الدوائر الكهربائية :

تتكون الدائرة الكهربائية البسيطة من مقاومة R بالأوم ، ومكثف C بالفاراد ، وحث L بالهنرى ، وقوة دافعة كهربية (ق.د.ك.) $E(t)$ بالفولت ، وبطارية أو مولد متصلين جميعهم على التوالي . يقاس التيار I المار فى الدائرة بالأمبير والشحنة q على المكثف بالكولوم .

قانون عقدة كيرشوف

المجموع الجبرى لفروق الجهد حول دائرة بسيطة مغلقة يساوى صفراً . من المعلوم أن فروق الجهد خلال مقاوم ، مكثف وحث يكونوا RI ، $L\left(\frac{dI}{dt}\right)$ ، $\left(\frac{1}{C}\right)q$ على الترتيب ، حيث q هى الشحنة على المكثف .

يكون فرق الجهد خلال (ق.د.ك.) هو $-E(t)$ ، وبالتالي فإنه من قانون عقدة كيرشوف يكون لدينا :

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} q - E(t) = 0 \quad (3)$$

وتكون العلاقة بين I ، q هى :

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad (4)$$

وبتعويض هاتين القيمتين فى (3) نحصل على المعادلة التفاضلية للشحنة على المكثف

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} E(t) \quad (5)$$

ويكون الشرطان الابتدائيان على q هما :

$$q(0) = q_0 \quad \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = I(0) = I_0 \quad (6)$$

للحصول على معادلة تفاضلية للتيار ، نفاضل المعادلة (3) بالنسبة إلى t ثم نعوض
المعادلة (4) مباشرة في المعادلة الناتجة فنحصل على :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L} \frac{dE(t)}{dt} \quad (7)$$

ويكون الشرط الابتدائي الأول هو $I(0) = I_0$. ونحصل على الشرط الابتدائي الثاني
من المعادلة (3) بحلها بالنسبة إلى $\frac{dI}{dt}$ ثم نضع $t = 0$ وبالتالي فإن :

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{L} E(0) - \frac{R}{L} I_0 - \frac{1}{LC} q_0 \quad (8)$$

ويمكن الحصول على تعبير للتيار إما بحل المعادلة (7) مباشرة أو بحل المعادلة (5)
بالنسبة إلى الشحنة ثم نفاضل هذا التعبير .

مثال :

وصلت دائرة (RCL) على التوالي لها $R = 180 \text{ ohms}$, $C = 1/280 \text{ Farad}$,
 $L = 20 \text{ henry}$ وجهد مؤثر $E(t) = 10 \sin t$. وبفرض عدم وجود شحنة ابتدائية على
المكثف ولكن يوجد تيار ابتدائي 1 ampere عند $t = 0$ وذلك تأثير الجهد أولاً . أوجد
الشحنة الناتجة على المكثف .

الحل :

بتعويض القيم المعطاة في المعادلة (5) نحصل على $\ddot{q} + 9\dot{q} + 14q = \frac{1}{2} \sin t$ وتكون
هذه المعادلة مطابقة في الصورة للمعادلة (1) في المثال السابق ، لذا يجب أن
يكون الحل مطابقاً في الصورة لحل تلك المعادلة . وبالتالي :

$$q = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500} \sin t - \frac{9}{500} \cos t$$

وباستخدام الشرطين الابتدائيين $q(0) = 0$ ، $\dot{q}(0) = 1$ ، نحصل على

$$c_2 = -101/500 ، c_1 = 110/500$$
 ، وبالتالي :

$$q = \frac{1}{500} (-110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13 \sin t - 9 \cos t)$$

وكما في مثال سابق ، يكون الحل عبارة عن مجموع حدود الحل العابر وحدود حل حالة الاستقرار .

مثال :

وصلت دائرة (RCL) على التوالي لها $C = 10^{-2}$ Farad ، $R = 10$ ohms ، $L = 05$ henry وجهد مؤثر $E(t) = 12$ volts . وبفرض عدم وجود تيار ابتدائي ولا شحنة ابتدائية عند $t=0$ وذلك عند تأثير الجهد أولاً . أوجد التيار الناتج في النظام .

الحل :

بتعويض القيم المعطاة في المعادلة (7) نحصل على معادلة تفاضلية متجانسة

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 20 \frac{dI}{dt} + 200I = 0$$
 وهي $\left[\frac{dE}{dt} = 0, E = 12 \right]$ ويكون جذرا المعادلة

المميزة المصاحبة هما $\lambda_1 = -10 - 10i$ ، $\lambda_2 = -10 + 10i$ ، وبالتالي يكون هذا مثالا

للنظام الحر غير المضائل للتيار . ويكون الحل هو :

$$I = e^{-10t} (c_1 \cos 10t) + c_2 \sin 10t \quad (1)$$

ويكون الشرطان الابتدائيان هما $I(0)=0$ ، $q(0)=0$ ، ومن المعادلة (8) يكون :

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{12}{1/2} - \left(\frac{10}{1/2} \right) (0) - \left(\frac{1}{1/2} \right) (10^{-2}) (0) = 24$$

وبتطبيق هذين الشرطين على (1) نحصل على $c_1 = 0$ ، $c_2 = \frac{12}{5}$ ، وبالتالي

$$I = \frac{12}{5} e^{-10t} \sin 10t \text{ وهو تيار عابر تماماً .}$$

مثال :

حل المثال السابق بإيجاد الشحنة على المكثف أولاً .

الحل

نحل أولاً بالنسبة للشحنة q ثم نستخدم العلاقة $I = \frac{dq}{dt}$ لنحصل على التيار .
بتعويض القيم المعطاة في المثال السابق في المعادلة (5) ، فيكون لدينا
 $24 = 200q + 20\dot{q} + \ddot{q}$ والتي تمثل نظاماً قسرياً للشحنة على النقيض للنظام المضائل
الحر الذي حصلنا عليه للتيار في المثال السابق . باستخدام طريقة المعاملات غير
المعينة لإيجاد حل خاص ، فنحصل على الحل العام
 $q = e^{-10t} [(c_1 \cos 10t) + (c_2 \sin 10t)]$ ويكون الشرطان الابتدائيان $I(0) = 0$ ، $q(0) = 0$
ونحصل على $c_1 = c_2 = -\frac{3}{25}$ ، وبالتالي
 $q = -e^{-10t} \left(\frac{3}{25} \cos 10t + \frac{3}{25} \sin 10t \right) + \frac{3}{25}$ ومنها $I = \frac{dq}{dt} = \frac{12}{5} e^{-10t} \sin 10t$
كما سبق . لاحظ أنه بالرغم من أن التيار يكون عابراً تماماً ، فإن الشحنة على
المكثف تكون هي مجموع حدود كل من الحل العابر وحل حالة الاستقرار .

مثال :

وصلت دائرة RCL على التوالي لها مقاومة 5 ohms وحث 0.05 Henry ومكثف $4 \times 10^{-4} \text{ Farad}$ وقوة دافعة كهربائية تبادلية $200 \cos 100t \text{ volts}$. أوجد تعبيراً للتيار المار

فى هذه الدائرة إذا كان كلا من التيار الابتدائى والشحنة الابتدائية على المكثف يساوى صفراً .

الحل :

لدينا

$$R/L = 5/0.05 = 100, 1/(LC) = 1/[0.05(4 \times 10^{-4})] = 50.000$$

$$\frac{1}{L} \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{0.05} 200(-10 \sin 100t) = -400.000 \sin 100t$$

وبالتالى تصبح المعادلة (7) :

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 100 \frac{dI}{dt} + 50.000I = -400.000 \sin 100t$$

ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما $-50 \pm 50\sqrt{19}i$ ، وبالتالى يكون حل المعادلة المتجانسة المصاحبة هو :

$$I_h = c_1 e^{-50t} \cos 50\sqrt{19} t + c_2 e^{-50t} \sin 50\sqrt{19} t$$

وباستخدام طريقة المعاملات غير المعينة ، نجد أن الحل الخاص هو :

$$I_p = \frac{40}{17} \cos 100t - \frac{160}{17} \sin 100t$$

وبالتالى يكون الحل العام هو :

$$I = I_h + I_p = c_1 e^{-50t} \cos 50\sqrt{19} t + c_2 e^{-50t} \sin 50\sqrt{19} t + \frac{40}{17} \cos 100t - \frac{160}{17} \sin 100t \quad (1)$$

ويكون الشرطان الابتدائيين هما $I(0) = 0, q(0) = 0$ ومن المعادلة (8)

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{200}{0.05} - \frac{5}{0.05} (0) - \frac{1}{0.05(4 \times 10^{-4})} (0) = 400$$

وبتطبيق الشرط الأول على المعادلة (1) مباشرة نحصل على :
 $0 = I(0) = c_1(1) + c_2(0) + \frac{40}{17}$ ، بتعويض هذه القيمة في
المعادلة (1) ثم بالتفاضل نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & -2.35 \left(-50e^{-50t} \cos 50\sqrt{19}t - 50\sqrt{19}e^{-50t} \sin 50\sqrt{19}t \right) \\ & + c_2 \left(-50e^{-50t} \sin 50\sqrt{19}t + 50\sqrt{19}e^{-50t} \cos 50\sqrt{19}t \right) \\ & - \frac{4000}{17} \sin 100t - \frac{16.000}{17} \cos 100t \end{aligned}$$

$$c_2 = 22.13 \text{ ومنها } 4000 = \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = -2.35(-50) + c_2(50\sqrt{19}) - \frac{16.000}{17} \text{ بينما}$$

وتصبح المعادلة :

$$\begin{aligned} I = & -2.35e^{-50t} \cos 50\sqrt{19}t + 22.13e^{-50t} \sin 50\sqrt{19}t \\ & + \frac{40}{17} \cos 100t - \frac{160}{17} \sin 100t \end{aligned}$$

٣- مسائل الطفو

اعتبر جسماً كتلته m مغموراً إما جزئياً أو كلياً في سائل كثافته ρ . مثل هذا الجسم يخضع إلى قوتين :

قوة الجاذبية إلى أسفل وقوة معاكسة تحكم بالآتي :

مبدأ أرشميدس

يخضع جسم فى سائل إلى قوة دفع متجهة إلى أعلى تساوى وزن السائل المزاح بالجسم . يحدث الاتزان عندما تكون قوة دفع السائل المزاح (الطفو) تساوى قوة الجاذبية على الجسم . بافتراض اسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها H ، وارتفاع الاسطوانة المغمور h وحدة من ارتفاعها عند حالة الاتزان . عند الاتزان يكون حجم الماء المزاح بالاسطوانة هو $\pi r^2 h$ والذي يعطى قوة الدفع (الطفو) التى يجب أن تساوى وزن الاسطوانة mg ، وعليه فإن :

$$\pi r^2 h = mg \quad (9)$$

نحدث الحركة عند إزاحة الأسطوانة من موضع الاتزان . نأخذ اختيارياً الاتجاه الرأسى لأعلى هو اتجاه x الموجب . إذا دفعت المياه الأسطوانة $x(t)$ وحدة ، حيث الأسطوانة ليست فى حالة الاتزان . القوة لأسفل أو السالبة على هذا الجسم تبقى mg ولكن قوة الدفع (الطفو) أو الموجبة تختزل إلى $\pi r^2 [h - x(t)]\rho$. وينتج من قانون نيوتن الثانى أن :

$$m\ddot{x} = \pi r^2 [h - x(t)]\rho - mg$$

ويمكن تبسيط هذه المعادلة باستخدام المعادلة (9) إلى $m\ddot{x} = -\pi r^2 x(t)\rho$

أو

$$x + \frac{\pi r^2 \rho}{m} x = 0 \quad (10)$$

مثال :

عين ما إذا كانت اسطوانة نصف قطرها 4 in ، ارتفاعها 10 in ، ووزنها 15 lb ،
يمكن أن تطفو في بركة مياه عميقة كثافتها 62.5 lb/ft^3 .

الحل :

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الاسطوانة (بالقدم) في موضع الاتزان . حيث
أن $r = \frac{1}{3}\text{ ft}$ فإنه ينتج من المعادلة أن :

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{15}{\pi \left(\frac{1}{3}\right)^2 62.5} = 0.688\text{ ft} = 8.25\text{ in}$$

وبالتالى فإن الاسطوانة سوف تطفو بارتفاع $10 - 8.25 = 1.75\text{ in}$ فوق خط الماء عند
موضع الاتزان .

مثال :

عين تعبيراً لحركة الاسطوانة المبينة في المثال السابق ، إذا أطلقت بعشرين فى
المائة من طولها أعلى خط الماء بسرعة 5 ft/sec فى الاتجاه الرأسى لأسفل .

الحل

لدينا $r = \frac{1}{3}\text{ ft}$ ، $\rho = 62.5\text{ lb/ft}^3$ ، $m = \frac{15}{32}\text{ slugs}$ وتصبح المعادلة (10)
على الصورة $\ddot{x} + 46.5421x = 0$ ، ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما
 $\pm \sqrt{46.5421}i = \pm 6.82i$ ، وعليه يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$x(t) = c_1 \cos 6.82 t + c_2 \sin 6.82 t \quad (1)$$

عندما $t=0$ يكون عشرين في المائة من طول الاسطوانة 10 in هو 2 in خارج الماء . باستخدام نتائج المثال السابق يكون معلوماً أن موضع الاتزان هو 1.75 أعلى الماء وبالتالي عند $t=0$ تكون الاسطوانة مرتفعة بـ $1/4\text{ in}$ أو $1/48\text{ ft}$ من موضع اتزانها ، ويكون $x(0) = 1/48\text{ ft}$ وتكون السرعة الابتدائية 5 ft/sec في الاتجاه الرأسى إلى أسفل أو في الاتجاه السالب ، وبالتالي فإن $\dot{x}(0) = -5$. وبتطبيق هذه الشروط الابتدائية على المعادلة (1) نجد أن : $c_1 = \frac{1}{48} = 0.021$ ، $c_2 = \frac{-5}{6.82} = -0.73$ ،
وتصبح المعادلة (1) على الصورة $x(t) = 0.021 \cos 6.82t - 0.73 \sin 6.82t$.

مثال :

عين ما إذا كانت أسطوانة نصف قطرها 10 cm ، وارتفاعها 15 cm ، ووزنها 19.6 N ، يمكن أن تطفو في بركة مياه عميقة كثافتها 980 dynes/cm^3 .

الحل

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الاسطوانة (بالسنتيمتر) عند موضع الاتزان . عند $mg = 19.6\text{ N} = 1.96 \times 10^6\text{ dynes}$ ، $r = 5\text{ cm}$ فإنه ينتج من المعادلة (9) أن :
$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{1.96 \times 10^6}{\pi (5)^2 (980)} = 25.5\text{ cm}$$

وحيث أن هذا أطول من ارتفاع الاسطوانة فإن الاسطوانة لايمكن أن تزيح مياه كافية لتطفو وبالتالي سوف تغوص إلى قاع البركة .

مثال :

عين ما إذا كانت اسطوانة نصف قطرها 10 cm ، وارتفاعها 15 cm ، ووزنها 19.6 N ، يمكن أن تطفو في بركة مياه عميقة كثافتها 2450 dynes/cm^3 .

الحل

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الاسطوانة (بالسنتيمتر) عند موضع الاتزان .
عند $mg = 19.6 N = 1.96 \times 10^6 \text{ dynes}$, $r = 5 \text{ cm}$ فإنه ينتج من المعادلة (9) أن :

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{1.96 \times 10^6}{\pi (5)^2 (2450)} = 25.5 \text{ cm}$$

وبالتالى فإن الاسطوانة ستطفو بارتفاع $15 - 10.2 = 4.8 \text{ cm}$ أعلى موضع اتزان السائل .

مثال :

يطفو منشور مقطعه مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه l فى بركة لسائل كثافته مجهولة بحيث يكون ارتفاعه موازياً للمحور الرأسى . بدأت حركة المنشور بإزاحته من موضع اتزانه وأعطى سرعة ابتدائية . عين المعادلة التفاضلية التى تحدد حركة المنشور الناتجة .

الحل

يحدث الاتزان عندما تكون قوة دفع السائل المزاح تساوى قوة الجاذبية على الجسم .
وتكون مساحة مثلث متساوى الأضلاع وطول ضلعه l هو $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$. بفرض ارتفاع h من الوحدات مغمورة عند موضع الاتزان ، ويكون حجم الماء المزاح عند

اللاتزان هو $\sqrt{3} l^2 h/4$. بفرض أن قوة الدفع (الطفو) هي $\sqrt{3} l^2 h\rho/4$. ومن قانون أرشميدس ، يجب أن تساوى قوة الدفع هذه وزن المنشور mg ، وبالتالي :

$$\sqrt{3} l^2 h\rho/4 = mg \quad (1)$$

نأخذ اختيارياً الاتجاه الرأسى لأعلى هو اتجاه x الموجب . إذا رفع المنشور إلى أعلى سطح الماء بـ $x(t)$ من الوحدات ، وبالتالي لا يكون فى موضع الاتزان . تبقى القوة على أسفل أو السالبة على الجسم كما هي mg ولكن قوة الدفع (الموجبة) تختزل إلى $\sqrt{3} l^2 [h - x(t)]\rho$. وينتج الآن من قانون نيوتن الثانى أن :

$$m\ddot{x} = \frac{\sqrt{3} l^2 [h - x(t)]\rho}{4} - mg$$

وبالتعويض عن المعادلة (1) فى هذه المعادلة الأخيرة وتبسيطها ، نحصل على

$$\ddot{x} + \frac{\sqrt{3} l^2 \rho}{4m} x = 0$$

٤- تصنيف الملول

تحكم اهتزاز الزنبركات والدوائر الكهربائية البسيطة والأجسام الطافية كلها بمعادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة على الصورة :

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t) \quad (11)$$

ويكون لمساائل اهتزاز الزنبرك المعرفة بالمعادلة (1) :

$$f(t) \equiv \frac{F(t)}{m}, \quad a_1 = \frac{a}{m}, \quad a_0 = \frac{k}{m}$$

ويكون لمساائل الطفو المعرفة بالمعادلة (10)

$$f(t) \equiv 0, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = \pi r^2 \rho / m$$

ويكون لمساائل الدوائر الكهربائية حيث يستبدل المتغير المستقل x إما بـ q فى المعادلة (5) أو بـ I فى المعادلة (7). تنقسم الحركة أو التيار فى هذه النظم إلى حرة أو غير متضائلة (أو غير مخمدة) عندما $f(t) \equiv 0$, $a_1 = 0$ وهى تنقسم كحركة متضائلة عندما تكون $f(t)$ صفراً تطابقياً ولكن a_1 لا تساوى صفراً. ويكون للحركة المتضائلة ثلاث حالات منفصلة طبقاً لجذور المعادلة المميزة المصاحبة، وهى:

(١) حقيقية ومختلفة (٢) متساوية (٣) مركبة مترافقة، وتنقسم هذه الحالات على الترتيب كما يلى:

(١) زائد المضائلة (٢) مضائلة حرجة (٣) التذبذبية المخمدة (أو ناقصة المضائلة فى المسائل الكهربائية)

إذا لم تكن $f(t)$ صفراً تطابقياً، فإن الحركة أو التيار يوصف بأنه قسرى (أو جبرى). وتكون الحركة أو التيار عابراً إذا أختفى (أى يؤول إلى الصفر) عندما $t \rightarrow \infty$. وتكون حركة حالة الاستقرار أو تيار حالة الاستقرار هى التى ليست عابرة ولا تصبح غير محدودة. تنتج حركات عابرة عن النظم المتضائلة الحرة، بينما تنتج حركات عابرة وحالة الاستقرار عن النظم المتضائلة القسرية (بفرض أن القوة الخارجية جيبيية). الحركة غير المتضائلة الحرة المعرفة بالمعادلة (11) حيث $f(t) \equiv 0$, $a_1 = 0$ دائماً لها حلول على الصورة:

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (12)$$

وهى تعرف حركة توافقية بسيطة. c_1 , c_2 ثابت، وترمز ω غالباً إلى التردد الدائرى. ويكون التردد الطبيعى f ، هو $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ، وهو يمثل عدد الذبذبات الكاملة

لكل وحدة زمن مأخوذة بالحـل . ويكون الزمن الدورى للنظام هو الزمن اللازم لإكمال دورة واحدة كاملة أى $T = \frac{1}{f}$. يكون للمعادلة (12) الصورة التبادلية .

$$x(t) = (-1)^k A \cos (\omega t - \phi) \quad (13)$$

حيث السعة $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ ، وزاوية الطور $\phi = \arctan (c_2/c_1)$ وتكون k مساوية الصفر عندما تكون c_1 موجبة وتساوى الوحدة عندما تكون c_1 سالبة .

تمارين

١. علق وزن 32 lb فى زنبرك فأحدث استطالة 8 ft فى طوله الطبيعى . بدأ الوزن الحركة بإزاحته 1 ft فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى وإعطائه سرعة ابتدائية 2 ft/sec فى الاتجاه الرأسى لأسفل . أوجد حركة الوزن الناشئة ، إذا كان الوسط المحيط يعطى مقاومة مهملة .

٢. عين (أ) التردد الدائرى و(ب) التردد الطبيعى و(ج) الزمن الدورى للاهتزازات المبينة فى مثال (٩) .

٣. علقت كتلة $\frac{1}{2} \text{ slug}$ فى زنبرك فأحدثت استطالة 2 ft فى طوله الطبيعى . بدأت الكتلة الحركة بدون سرعة ابتدائية بإزاحته $\frac{1}{2} \text{ ft}$ فى الاتجاه الرأسى إلى أعلى . أوجد الحركة التالية للكتلة إذا كان الوسط يعطى مقاومة $4x \text{ lb}$.

٤. وصلت دائرة (RCL) على التوالى حيث $C = 0.02 \text{ Farad}$ ، $R = 6 \text{ ohms}$ ، ولها جهد مؤثر $E(t) = 6 \text{ volts}$. وبفرض عدم وجود تيار ابتدائى وشحنة ابتدائية عند $t = 0$ ، وذلك عند تأثير الجهد أولاً . أوجد الجهد التالى على المكثف والتيار فى الدائرة .

٥. وصلت دائرة RCL على التوالى ، بمقاومة 5 ohms ، ومكثف سعته $4 \times 10^{-4} \text{ Farad}$ ، وحث 0.05 Henry ، ولها قوة دافعة كهربية مؤثرة $E(t) = 110 \text{ volts}$. وبفرض عدم وجود تيار ابتدائى وشحنة ابتدائية على المكثف ، أوجد تعبيراً لكل من التيار المار خلال الدائرة والشحنة على المكثف عند أى لحظة t .

٦. وصلت دائرة RCL على التوالي ، بمقاومة $16\ ohms$ ومكثف سعته $0.02\ Farad$ ، وحث $2\ Henry$ ولها جهد مؤثر $E(t) = 100 \sin 3t$ وبفرض عدم وجود تيار ابتدائي وشحنة ابتدائية على المكثف ، أوجد تعبيراً للتيار المار خلال الدائرة على المكثف عند أى لحظة t .

٧. عين موضع اتران اسطوانة نصف قطرها $3\ cm$ ، ارتفاعها $10\ cm$ ، وكثافتها $700\ g$ ، والتي تطفو بحيث يكون محورها رأسياً فى بركة مياه عميقة كثافتها $1\ g/cm^3$.

٨. يطفو صندوق على شكل متوازي مستطيلات عرضه w وطوله l وارتفاعه h فى بركة سائل عميقة كثافتها ρ بحيث يكون ارتفاعه موازياً للمحور الرأسى . بدأ الصندوق الحركة بإزاحته x_0 وحدة من موضع اترانه وإعطائه سرعة ابتدائية v_0 . عين المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة الصندوق التالية .

الباب العاشر

**تحويل لابلاس
وتطبيقاته**

الباب العاشر

تحويل لابلاس واستخدامه فى حل المعادلات التفاضلية العادية

Laplace Transform

يستخدم بتحويل لابلاس فى حل بعض المعادلات التفاضلية العادية وكذلك بعض المعادلات التفاضلية الجزئية والتكاملية .

١ - تعريف : (تحويل لابلاس)

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx , \quad p > 0 \quad (1) \quad \text{يسمى التكامل}$$

بتحويل لابلاس ويرمز له بالرمز $L\{f\}$ و فى هذه الحالة يمكن كتابة (1) على الصورة :

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx , \quad p > 0 \quad (2)$$

٢ - خواص المؤثر $L\{f\}$:

نفترض ان α و β ثابتين وأن كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالة فى المتغير x و أن $L\{f\}$ هو مؤثر لابلاس ، فإن :

$$1 - L\{\alpha f(x)\} = \alpha L\{f(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة (1) نجد أن :

$$L\{\alpha f(x)\} = \int_0^{\infty} \alpha f(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha L\{f(x)\}$$

$$2- L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة (1) وحيث أن كل من α و β ثابتين فإن :

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \int_0^{\infty} \alpha f(x) + \beta g(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha f(x) \cdot e^{-px} dx + \int_0^{\infty} \beta g(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx + \beta \int_0^{\infty} g(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

مما سبق نستنتج أن المؤثر $L\{ \}$ مؤثر تكاملي خطي .

تعريف : (تحويل لابلاس العكسي)

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\} \quad \text{فإن} \quad L\{f(x)\} = \bar{f}(p) \quad \text{إذا كان}$$

ويسمى $L^{-1}\{ \}$ بمؤثر لابلاس العكسي للمؤثر $L\{ \}$. وهذا المؤثر له الخواص الآتية :

$$1- L\{L^{-1}\{\bar{f}(p)\}\} = \bar{f}(p),$$

$$2- L^{-1}\{L(f(p))\} = f(p),$$

ويمكن إيجاد تحويل لابلاس لكل دالة تحقق الشرط : $3- L^{-1}\{\alpha \bar{f}(p)\} = \alpha L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$

$$|f(x)| < M e^{ax}$$

حيث a و M عدنان حقيقيان موجبان .

تسمى الدوال التي تحقق الشرط السابق دوال لها درجة أسية a وهى الدوال
التي على الصورة $x^k, \sin kx, \cos kx, \dots$

والآن سنوجد تحويلات لابلاس لبعض الدوال .

$$(1) \text{ إذا كان } f(x) = 1$$

فإن

$$L\{1\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

أى أن

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

(3)

$$(2) \text{ إذا كان } f(x) = x^n ; n \geq 1 :$$

$$L\{x^n\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx$$

فإن

وبوضع $px = u$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} ; n=1,2,3,\dots$$

(4)

(٣) إذا كان $f(x) = e^{ax}$ حيث a ثابت حقيقي :

فإن

$$\begin{aligned} L\{e^{ax}\} &= \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{ax} e^{-px} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(p-a)x} dx \end{aligned}$$

$$L\{e^{ax}\} = \left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

وبالتالى فإن

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} ; p > a \quad (5)$$

(٤) إذا كان $f(x) = \sin ax$ حيث a ثابت حقيقي :

$$L\{\sin ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \sin ax e^{-px} dx$$

فإن

$$= \frac{a}{p^2 + a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2 + a^2} \quad (6)$$

(٥) إذا كان $f(x) = \cos ax$ حيث a ثابت حقيقي :

$$L\{\cos ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \cos ax \cdot e^{-px} dx$$

فإن

$$= \frac{p}{p^2 + a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L \{ \cos ax \} = \frac{p}{p^2 + a^2} \quad (7)$$

(٦) إذا كان $f(x) = \sinh ax$ حيث a ثابت حقيقي :

$$L \{ \sinh ax \} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \sinh ax \cdot e^{-px} dx$$

فإن

$$= \frac{a}{p^2 - a^2}$$

أى أن :

$$L \{ \sinh ax \} = \frac{a}{p^2 - a^2} \quad (8)$$

ذلك لأن :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sinh ax \cdot e^{-px} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{ax} - e^{-ax}) \cdot e^{-px} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{-(p-a)x} - e^{-(p+a)x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)} - \frac{e^{-(p+a)x}}{-(p+a)} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right] = \frac{1}{2} \frac{p+a-p+a}{p^2 - a^2} \\ &= \frac{a}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

وبطريقة أخرى :

$$\begin{aligned} L \{ \sinh ax \} &= L \left\{ \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} [L \{ e^{ax} \} - L \{ e^{-ax} \}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right] \\ &= \frac{a}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

(٧) إذا كان $f(x) = \cosh ax$ حيث a ثابت حقيقى :

فإن :

$$L \{ \cosh ax \} = \frac{p}{p^2 - a^2} \quad (9)$$

وذلك لأن

$$\begin{aligned} L \{ \cosh ax \} &= L \left\{ \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} [L \{ e^{ax} \} + L \{ e^{-ax} \}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{p+a-p+a}{p^2 - a^2} \\ &= \frac{p}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

ويمكن تلخيص هذه النتائج فى الجدول التالى :

S. No.	$f(x)$	$L f(p)$
1	1	$1/p, p > 0$
2	x^n (n is a + v θ integer)	$n! / p^{n+1}, p > 0$
3	$x^n, n > -1$	$\Gamma(n+1) / p^{n+1}, p > 0$
4	x^{ax}	$1/(p-a), p > 0$
5	\sin^{-ax}	$a/(p^2 + a^2), p > 0$
6	$\cos ax$	$p/(p^2 + a^2), p > 0$
7	$\sinh ax$	$a/(p^2 - a^2), p > a $
8	$\cosh ax$	$p/(p^2 - a^2), p > a $

نظرية (١) :

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{f}(p+a)$$

إذا كانت $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$ فإن

البرهان :

من تعريف مؤثر لابلاس نجد أن :

$$\begin{aligned} L\{e^{-ax} f(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-ax} f(x) \cdot e^{-px} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+p)x} f(x) \cdot dx = \bar{f}(p+a) \end{aligned}$$

مثال :

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}; n=1,2,3,\dots$$

أثبت أن

الحل :

من تعريف تحويل لابلاس نجد أن

$$\begin{aligned} L\{x^n e^{-ax}\} &= \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cdot e^{-px} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^n e^{-(a+p)x} \cdot dx = \bar{f}(p+a) \end{aligned}$$

ولدينا :

$$L\{x^n\} = \bar{f}(x) = \frac{n!}{p^{n+1}}; n=1,2,3, \dots$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \bar{f}(p+a) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}};$$

$n=1,2,3,\dots$

نظرية (٢):

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

إذا كانت

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p); n = 1, 2, 3, \dots$$

فإن

البرهان

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

حيث أن

بالاشتقاق بالنسبة إلى p ومع خواص التفاضل والتكامل ، فإننا نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \bar{f}(p) &= \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} (e^{-px}) f(x) dx \\ &= - \int_0^{\infty} x e^{-px} f(x) dx \\ &= -L\{xf(x)\} \end{aligned}$$

بتكرار هذا الاشتقاق مرة أخرى نجد أن

$$\frac{d^2}{dp^2} \bar{f}(p) = (-1)^2 L\{x^2 f(x)\}.$$

بتكرار هذا الاشتقاق بالنسبة إلى p عدد $(n-2)$ من المرات نحصل على العلاقة :

$$\frac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p) = (-1)^n L\{x^n f(x)\} ; \quad n = 1, 2, 3$$

مثال :

$$L\{x \cos ax\} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

إثبت أن

الحل:

$$L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

لدينا

بتطبيق نظرية (٢) فإن :

$$\begin{aligned} L\{x \cos ax\} &= -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + a^2} \right) \\ &= \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

نظرية (٣) : (تغير المقياس) *Change of scale*

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

إذا كان

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$$

فإن

مثال:

$$L\{\sin 3x\}$$

أوجد

الحل:

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

لدينا

$$L\{\sin 3x\} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{p^2 + 9}$$

فإن

نظرية (٤) :

$$L\left\{\int_0^x f(u) du\right\} = \frac{\bar{f}(p)}{p} \quad \text{فإن} \quad , \quad L\{f(x)\} = \bar{f}(p) \quad \text{إذا كان}$$

مثال:

أوجد

$$L\left\{\int_0^x \sin 2u du\right\}$$

الحل:

$$L\left\{\int_0^x \sin 2u du\right\} = \frac{2}{p(p^2 + 4)}$$

لدينا $L\{\sin x\} = \frac{2}{p^2 + 4}$ فيكون

نظرية (٥) : للقسمه على x

$$L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_p^\infty \bar{f}(u) du \quad \text{فإن} \quad L(f(x)) = \bar{f}(p) \quad \text{إذا كان}$$

بشرط أن تكون $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ موجودة

مثال:

أوجد

$$L = \left\{\frac{\sin x}{x}\right\}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad L\{\sin x\} = \frac{1}{p^2 + 1} \quad \text{حيث أن}$$

$$L = \left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \int_p^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$$

فإن

٣- تحويلات لابلاس العكسية *Inverse Laplace transforms*

من تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وجدنا أن

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

وبافتراض أن L^{-1} هو المؤثر العكسي للمؤثر L فإن :

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\}$$

وعلى هذا فإنه مما سبق يمكن بسهولة استنتاج ما يلي:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1 \quad \text{فإن} \quad L = \{1\} \frac{1}{p} \quad \text{١- إذا كان}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{n!}{p^{n+1}}\right\} = x^n; n = 1, 2, 3 \quad \text{فإن} \quad L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}; n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{٢- إذا كان}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{ax} \quad \text{فإن} \quad L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} \quad \text{٣- إذا كان}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} = \cos ax \quad \text{فإن} \quad L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2+a^2} \quad \text{٤- إذا كان}$$

وهكذا بالنسبة لباقي الدوال

مثال:

أوجد $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right\}$ حيث a, b ثابتان .

الحل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}$$

بالضرب في $(p+a)(p+b)$ وبمساواة المعاملات نجد أن

$$A = -B = \frac{1}{a-b}$$

ومنها نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسي

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+a)(p+b)} \right\} &= \frac{1}{a-b} \left[L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+a} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+b} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{a-b} (e^{-ax} - e^{-bx}) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+a)(p+b)} \right\} = \frac{1}{a-b} (e^{-ax} - e^{-bx})$$

مثال:

لوجد $L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} \right\}$ حيث a, b ثابتان حقيقيان.

الحل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2} \left[\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2} \right]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسي

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{b^2-a^2} [L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+b^2}\right\}]$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2} (\cos ax - \cos bx)$$

$$[L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}\right\}] = \frac{1}{b^2-a^2} (\cos ax - \cos bx)$$

وبالتالى

مثال:

لوجد $L^{-1}\left\{\frac{a}{p(p+a)}\right\}$ حيث a ثابت.

الحل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{a}{p(p+a)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{p(p+a)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}$$

$$= 1 - e^{-ax}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{p(p+a)}\right\} = 1 - e^{-ax}$$

وبالتالى

٤ - تحويلات لابلاس للمشتقات *Laplace Transforms of Derivatives*

نفترض أن الدالة $y(x)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، فإن مؤثر لابلاس للمشتقة

يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$.

ويعرف كالاتى : $L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{dy}{dx} dx$ أى

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} dy$$

$$= [ye^{-px}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} ye^{-px} dx$$

$$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

وبالتالى

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = p\bar{y}(p) - y(0) \quad (1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالاتى:

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-px} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \left[\frac{dy}{dx} e^{-px}\right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \frac{dy}{dx} e^{-px} dx$$

ومن العلاقة (١) يكون

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0)$$

من هذا نحصل على

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0) \quad (2)$$

حيث $y(0)$ هى قيمة $y(x)$ محسوبة عند x

$= 0$ و $y^{(1)}$ هى قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$.

والصيغة العامة هى

$$L\left\{\frac{d^ny}{dx^n}\right\} = p^n \bar{y}(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{(1)}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

حيث $y^{(r)}(0)$ هي قيمة $\frac{d^r y}{dx^r}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$ و $r = 0, 1, \dots, n-1$.

٥ - تطبيقات تحويل لابلاس :

سوف نستخدم تحويل لابلاس ومعكوسة في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية .

أ - حل المعادلات التفاضلية العادية:

كتطبيق لتحويلات لابلاس سندرس في الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية العادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس.

مثال:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية العادية

$$y(0) = 1$$

الحل:

بالتأثير بمؤثر لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

لدينا

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = p\bar{y}(p) - y(0)$$

$$L\{y(x)\} = \bar{y}(p)$$

$$L\{\cos x\} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

فنحصل على

$$py(p) - y(0) + 2y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

وبالتالى فإن

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{y(0)}{(p+2)}$$

ولكن من الشروط الابتدائية $y(0) = 1$ نحصل على :

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{1}{(p+2)}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = -\frac{2}{5} \left(\frac{1}{p+2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1+2p}{p^2+1} \right)$$

ومنها

$$\begin{aligned} \bar{y}(p) &= -\frac{2}{5} \left(\frac{1}{p+2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1+2p}{p^2+1} \right) + \frac{1}{p+2} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{p+2} \right) \end{aligned}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى نحصل على

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{5} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2+1} \right\} + \frac{2}{5} L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+1} \right\} + \frac{3}{5} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+2} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \frac{3}{5} e^{-2x} \end{aligned}$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x) = \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \frac{3}{5} e^{-2x}$$

مثال

حل المعادلة $y'' + y = x$ و $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

الحل:

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} + L\{y(x)\} = L\{x\}$$

وبالتالي فإن

$$p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0) + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية

$$p^2 \bar{y}(p) - p + 2 + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وعليه فإن

$$\bar{y} = L\{y\} = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} + \frac{p - 2}{p^2 + 1}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية فنحصل على

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1} \\ &= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1}\right\}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = x + \cos x - 2 \sin x$$

مثال:

حل المعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, \quad y(0) = -3, y'(0) = 5$$

الحل:

باستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة نحصل على

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} - 3L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

وبالتالى

$$\{p^2 y - py(0) - y'(0)\} - 3\{p\bar{y} - y(0)\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية فنجد أن

$$\{p^2 \bar{y} - 3p - 5\} - 3\{p\bar{y} + 3\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 - 3p + 2)(p-2)} + \frac{14 - 3p}{p^2 - 3p + 2}$$

وعلى ذلك

$$\bar{y} = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\bar{y} = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسى فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

على الصورة

$$y = -7e^x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}$$

ب) المعادلة التفاضلية الجزئية

ليكن الدالة $y(x, t)$ معرفة على الفترة $a \leq x \leq b$ و $t > 0$.

وإذا نظرنا إلى $y(x, t)$ كدالة في t ، ذات رتبة أسية عندما $t \rightarrow \infty$ وأنها متصلة في أجزاء (piece wise) على كل فترة محدودة من $t \geq 0$ فإننا نستخدم الرموز التالية

$$L\{y(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{pt} y(x, t) dt = \bar{y}(x, p) = \bar{y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y_x(x, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = y_t(x, t)$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = y_x(0, t), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0} = y_t(x, 0)$$

فيكون لدينا

$$(i) \quad L\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\} = p\bar{y}(x, p) - y(x, 0)$$

$$(ii) \quad L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} = p^2 \bar{y}(x, p) - py(x, 0) - y_t(x, 0)$$

$$(iii) \quad L\left\{\frac{\partial y}{\partial x}\right\} = \frac{d\bar{y}}{dx}$$

$$(iv) \quad L\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2}$$

مثال:

$$y(x, 0) = 6e^{-3x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y + 2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

حل المعادلة:

والتي تكون محدودة لكل $x > 0$ ، $t > 0$

الحل:

ليكن $l = \{y(x, t)\} = \bar{y}(x, p)$ وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على :

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{y} + 2[p\bar{y} - y(x, 0)]$$

أى أن

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{y} + 2(p\bar{y} - 6e^{-3x}) \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية ويكون عامل التكامل هو

$$I = e^{-\int (2p+1)dx} = e^{-(2p+1)x}$$

ويكون حل المعادلة (1) هو

$$\bar{y}e^{(2p+1)x} = c - 12 \int e^{-2x} \cdot e^{(2p+1)x} dx$$

أى أن

$$\bar{y}e^{(2p+1)x} = c - 12 \int e^{-3x} e^{-(2p+1)x} dx$$

$$= c + \frac{6}{p+2} e^{-2(p+2)x}$$

$$\bar{y}(x, p) = ce^{(1+2p)x} + \left(\frac{6}{p+2}\right)e^{-2x} \quad (2)$$

وحيث أن $y(x, t)$ محدودة عند ما $x \rightarrow \infty$ فينتج أن $\bar{y}(x, p)$ يجب أن تكون أيضا محدودة عندما $x \rightarrow \infty$ ، وباستخدام هذه الحقيقة في (2) نرى أن يجب أخذ $C=0$ وبالتالي فإن (2) تؤول إلى : $\bar{y}(x, p) = (6e^{-2x})/(p+2)$

وبأخذ معكوس لابلاس نحصل على

$$y(x, t) = 6e^{-2x} L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = 6e^{-2x} \cdot e^{-2t} = 6e^{-(2x+2t)}$$

مثال:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

حل المعادلة

حيث $y(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$ ، $y(5, 0) = y(0, t) = 0$

الحل:

$$L = \{y(x, t) = \bar{y}^{(x, p)}\} \quad \text{ليكن}$$

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين للمعادلة المعطاة نحصل على

$$p\bar{y} - y(x, 0) = 2 \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{p}{2} \bar{y} = -5 \sin 4\pi x$$

$$[D^2 - (\frac{p}{2})]\bar{y} = -5 \sin 4\pi x \quad \text{أى أن}$$

$$\bar{y}_h = c_1 e^{\sqrt{p/2}} + c_2 e^{-x\sqrt{p/2}} \quad \text{ويكون حل الدالة المتممة هو}$$

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} \bar{y}_p &= \frac{1}{D^2 - \left(\frac{p}{2}\right)} (-5 \sin 4\pi x) = \frac{-5}{-4(4\pi)^2 - \frac{p}{2}} \sin 4\pi x \\ &= \frac{10 \sin 4\pi x}{32\pi^2 + p} \end{aligned}$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$\bar{y}(x, p) = c_1 e^{x\sqrt{p/2}} + c_2 e^{-x\sqrt{p/2}} + \frac{10 \sin 4\pi x}{32\pi^2 + p} \quad (1)$$

وبأخذ تحويل لابلاس للشروط الابتدائية $y(0, t) = 0$ ، $y(5, t) = 0$ نجد أن

$$y(0, p) = 0 \quad (2)$$

$$y(5, p) = 0 \quad (3)$$

يوضع $x = 0$ فى (1) وباستخدام (2) نجد أن

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (4)$$

ويوضع $x = 5$ في (1) واستخدام (3) نجد أن

$$c_1 e^{\sqrt{p/2}} + c_2 e^{-\sqrt{p/2}} = 0 \quad (5)$$

ومن (5) , (6) نجد أن $c_1 = c_2 = 0$ ومن (1) نحصل على

$$\bar{y}(x, p) = 10 \sin 4\pi x / (32\pi^2 + p)$$

وبأخذ التحويل لابلاس العكسى نجد أن

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 10 \sin 4\pi x L^{-1}(32\pi^2 + p) \\ &= 10 e^{-32x^2} \sin 4\pi x \end{aligned}$$

ج) المعادلات التكاملية:

الصورة العامة للمعادلة للتكاملية هي

$$f(t) = g(t) + \int_a^t (k, u) f(u) du \quad (1)$$

حيث النهاية العليا للتكامل إما أن تكون ثابتا أو متغير. الدالتان $K(t, u)$, $g(t)$ معلومتان أما الدالة $f(t)$ فهي مجهولة يراد تعيينها. تسمى الدالة $k(t, u)$ بالنواة (kernel) . عندما تكون $k(t, u)$ على الصورة $k(t-u)$ فيقال أنها المعادلة (1) من نوع الحوية (التفاف convolution) (أنظر الحوية).

أما المعادلة التفاضلية التكاملية *Integro-Differential Equation* فهي معادلة تكاملية تحتوى $f(t)$, $f'(t)$.

مثال:

$$f(t) = t^2 + \int_0^t f(u) \sin(t-u) du \quad \text{حل المعادلة التكاملية}$$

الحل:

$$f(t) = t^2 + f(t) * \sin t$$

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل على:

$$\bar{f}(p) = \frac{2}{p^2} + L\{f(t)\}L\{\sin t\} = \frac{2}{p^2} + \frac{\bar{f}(p)}{p^2 + 1}$$

$$\bar{f}(p) = \frac{p^2 + 1}{p^3} = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^3}$$

أى أن

وبأخذ معكوس لابلاس نحصل على :

$$f(t) = 2\left(\frac{t^2}{2}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4}\right) = t^2 + t^4/12$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التكاملية

$$f'(t) = \sin t + \int_0^t f(t-u) \cdot \cos u \, du$$

الحل:

بإعادة كتابة المعادلة على الصورة

$$f(t) = \sin t + f(t) * \cos t \quad , \quad F(0) = 0$$

وبأخذ تحويل لابلاس للطرفين نحصل

$$p\bar{f}(p) - f(0) = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot L\{f(t)\} \cdot L\{\cos t\}$$

$$p\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{p\bar{f}(p)}{p^2+1} \quad \text{أى أن}$$

$$(p - \frac{p}{p^2+1})\bar{f}(p) = \frac{1}{p^2+1} \quad \text{أو}$$

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{p^3} \quad \text{أى}$$

وبأخذ تحويل لابلاس العكسى نحصل على :

$$f(t) = t^2 / 2! = \frac{t^2}{2}$$

(الحوية الالتفاف - الطى) (Convolution)

تكون الحوية لدالتين $f(x), g(x)$ على الصورة

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \quad (1)$$

نظرية ٦: العلاقة التالية صحيحة

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

نظرية ٧: (نظرية الحوية)

$$L\{f(x)\} = F(p) , L\{g(x)\} = G(p) \quad \text{إذا كان}$$

$$L\{f(x) * g(x)\} = L\{f(x)\}L\{g(x)\} = F(p)G(p) \quad \text{فإن}$$

نستنتج مباشرة من هاتين النظريتين

$$L^{-1}\{F(p)G(p)\} = f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \quad (2)$$

إذا كانت إحدى الحويتين في المعادلة (1) أبسط في الحساب فإننا نختار تلك الحوية عند تعيين معكوس تحويل لابلاس للضرب.

مثال:

أوجد $f(x) * g(x)$ عندما $f(x) = e^{3x}$ ، $g(x) = e^{2x}$

الحل:

لدينا $f(t) = e^{3t}$ ، $g(x-t) = e^{2(x-t)}$

$$f(x) * g(x) = \int_0^x e^{3t} e^{2(x-t)} dt = \int_0^x e^{3t} e^{2x} e^{-2t} dt$$

و

$$= e^{2x} \int_0^x e^{t} dt = e^{2x} [e^t]_{t=0}^{t=x} = e^{2x} (e^x - 1) = e^{3x} - e^{2x}$$

مثال:

أوجد $f(x) * g(x)$ للدالتين في المثال السابق . وحقق نظرية (٦)

الحل:

حيث أن $f(x-t) = e^{3(x-t)}$ ، $g(t) = e^{2t}$ فإن

$$g(x) * g(t) = \int_0^x g(t) f(x-t) dt = \int_0^x e^{2t} e^{3(x-t)} dt$$

$$= e^{3x} \int_0^x e^{-t} dt = e^{3x} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=x}$$

$$= e^{3x} (-e^{-x} + 1) = e^{3x} - e^{2x}$$

والتي من المثال السابق فهي تساوى $f(x) * g(x)$

مثال:

أوجد $f(x) * g(x)$ عندما $g(x) = x^2$ ، $f(x) = x$

الحل:

لدينا $f(t) = t$ ، $g(x-t) = (x-t)^2 = x^2 - 2xt + t^2$ وعلى ذلك :

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \int_0^x t(x^2 - 2xt + t^2) dt \\ &= x^2 \int_0^x t dt - 2x \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^3 dt \\ &= x^2 \frac{x^2}{2} - 2x \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} = \frac{1}{12} x^4 \end{aligned}$$

مثال:

أوجد $L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 - 5p + 6} \right\}$ بواسطة الحوية.

الحل:

$$\frac{1}{p^2 - 5p + 6} = \frac{1}{(p-3)(p-2)} = \frac{1}{p-3} \cdot \frac{1}{p-2}$$

لاحظ أن

ليكن $G(p) = \frac{1}{(p-2)}$ ، $F(p) = \frac{1}{(p-3)}$ ولدينا $g(x) = e^{2x}$ ، $f(x) = e^{3x}$

وبنتج أن :

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 - 5p + 6} \right\} = f(x) * g(x) = e^{3x} * e^{2x} = e^{3x} - e^{2x}$$

مثال:

أوجد $L^{-1}\left\{\frac{6}{p^2-1}\right\}$

الحل:

لاحظ أن
ليكن $L^{-1}\left\{\frac{6}{p^2-1}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{6}{(p-1)(p+1)}\right\} = 6 L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p+1)}\right\}$

$G(p) = \frac{1}{(p-1)}$, $F(p) = \frac{1}{(p+1)}$

لدينا $g(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^x$

$L^{-1}\left\{\frac{6}{p^2-1}\right\} = 6 L^{-1}\{F(p) G(p)\} = 6 e^x * e^{-x}$

$= 6 \int_0^x e^t e^{-(x-t)} dt = 6 e^{-x} \int_0^x e^{2t} dt$ ينتج من ذلك أن

$= 6 e^{-x} \left[\frac{e^{2x} - 1}{2} \right]_0^x = 3e^x - 3e^{-x}$

مثال:

أوجد $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\}$ بواسطة الحوية.

الحل:

إذا عرفنا $F(p) = G(p) = \frac{1}{(p-1)}$ فإن $f(x) = g(x) = e^x$

ويكون

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2}\right\} = L^{-1}\{F(p) G(p)\} = f(x) * g(x)$

$= \int_0^x f(t) g(x-t) dt = \int_0^x e^t e^{x-t} dt$

$= e^x \int_0^x (1) dt = x e^x$

مثال:

برهن النظرية (٦).

الحل:

نضع التعويض $\tau = x - t$ في الطرف الأيمن من المعادلة (١) . فنحصل على

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt = \int_x^0 f(x-\tau)g(\tau)(-d\tau) \\ &= -\int_x^0 g(\tau)f(x-\tau)d\tau = \int_0^x g(\tau)f(x-\tau)d\tau \\ &= g(x) * f(x) \end{aligned}$$

مثال:

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x)$$

أثبت أن

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) * [g(x) + h(x)] &= \int_0^x f(t)[g(x-t) + h(x-t)]dt \\ &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt + \int_0^x f(t)h(x-t)dt \\ &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt + \int_0^x f(t)h(x-t)dt \\ &= f(x) * g(x) + f(x) * h(x) = R.H.S \end{aligned}$$

تمارين

(أ) أوجد تحويل لابلاس للدوال التالية :

$$e^{3x}, e^{3x} \sin x, \cos 2x, e^{3x} \cos 2x, x^3, x \cos 3x, x^2 \sin x,$$

$$\int_0^1 t e^{-3t} dt, x \sinh x, \frac{e^{-ax} - e^{bx}}{x}, \frac{\cos ax - \cos bx}{x}, \frac{\sinh x}{x}$$

(ب) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية

$$(1) y'' + 3y' + 2y = 0,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1$$

$$(2) y'' + 4y = f(x)$$

$$(3) y'' + 2y' + 5y = e^{-1} \sin t,$$

$$y(0) = 0, y$$

$$(4) y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 e^t, y(0) = 1,$$

$$y'(0), y''(0) = 2$$

(ج) أوجد باستخدام معكوس لابلاس العكسي فيما يلي:

$$(i) L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2 + a^2} \right\}$$

$$(ii) L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{n+1}} \right\}$$

$$(iii) L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + 2} \right\}$$

$$(iv) L^{-1} \left\{ \frac{6p - 4}{p^2 - 4p + 20} \right\}$$

$$(v) L^{-1} \left\{ \frac{3p + 7}{p^2 - 2p - 3} \right\}$$

$$(vi) L^{-1} \left\{ \frac{3p + 7}{p^2 - 2p + 3} \right\}$$

(د) استخدم نظرية الحوية لحساب ما يلي:

$$(٢) \text{ أوجد } 2 * x$$

$$(١) \text{ أوجد } x * \cos x$$

$$(٤) \text{ أوجد } e^{4x} * e^{-2x}$$

$$(٣) \text{ أوجد } 4x * e^{2x}$$

$$(٦) \text{ أوجد } x * x e^{-x}$$

$$(٥) \text{ أوجد } x * e^x$$

$$(٨) \text{ أوجد } x * \cos x$$

$$(٧) \text{ أوجد } 3 * \sin 2x$$

(هـ) استخدم الحويات لإيجاد معكوس لابلاس للدوال المعطاة

$$(1) \frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

$$(2) \frac{1}{(p)(p)}$$

$$(3) \frac{2}{p(p+1)}$$

$$(4) \frac{1}{p^2+3p-40}$$

$$(5) \frac{3}{p^2(p^2+3)}$$

$$(6) \frac{4}{p(p^2+4)}$$

$$(7) \frac{1}{p^2(p^2+4)} \quad \text{مستخدما} \quad F(p) = \frac{1}{p^2}, \quad G(p) = \frac{p}{(p^2+4)}$$

(و) أوجد المحنود للمعادلة $t > 0, x > 0 \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ تحت الشروط

$$y(0, t) = 1, y(x, 0) = 0$$

(ز) أوجد الحل المحنود

$$y(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x, y(5, t) = y(0, t) = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$y(x, 0) = x, t > 0, 0 < x < 1, \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t} = 1 - e^{-t}$$

(ح) أوجد الحل المحنود

(ط) حل المعادلات التكاملية التالية

$$(i) f(t) = 1 + \int_0^t f(u) \sin 1(t-u) du$$

$$(ii) f(t) = e^{-t} - 2 \int_0^t f(u) \cos 1(t-u) du$$

$$(iii) f'(t) = t + \int_0^t f(t-u) \cos u du, F(0) = 0$$

الباب الحادى عشر

استخدام المتسلسلات فى حل المعادلات التفاضلية

الباب الحادى عشر

حل المعادلات التفاضلية بطريقة المتسلسلات

Solution of Differential Equations by use of Series

درسنا فى الأبواب السابقة بعض الطرق لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى ومن بينها استخدام المتسلسلات ، أما المعادلات التفاضلية من الرتب العليا فإنه فى اغلب التطبيقات العملية تكون معادلات غاية فى الأهمية ولا يمكن حلها بالطرف العادية حيث أن حلها تحتوى على دوال معقدة غير معروفة لنا (مثال ذلك المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات المعاملات المتغيرة سواء كانت خطية أو غير خطية) . ولذلك سنتعرض لدراسة طريقة المتسلسلات لإيجاد الحلول للمعادلات التفاضلية ، وستقتصر دراستنا بالتفصيل على معادلات الرتبة الثانية لأهميتها فى المجالات العملية ويتضح هذا الأسلوب لحل المعادلات التفاضلية الأمثلة المعطاة .

١ - مقدمة :

بعض الخواص على العلامة التجميعية Σ :

$$(1) \sum_{n=p}^k F(n) = F(p) + F(p+1) + \dots + F(k), \quad k > p$$

حيث K, p أعداد صحيحة .

$$(2) \sum_{n=p}^{\infty} a_n F(n) x^{n+p} = \sum_{n=2p}^{\infty} a_{n-p} F(n-p) x^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} F(n+p) x^{n+2p}$$

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n^2 a_n x^{n-2} + n a_n x^{n+5}] = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)^2 a_{n+2} x^2 + \sum_{n=5}^{\infty} (n-5) a_{n-5} x^n$$

$$(3) \text{ If } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow a_n = b_n, \forall n \geq 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n \Rightarrow a_n = b_n, \forall n \geq 0$$

مثال:

إذا كان

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$$\therefore n c_n = c_{n-1} \Rightarrow c_n = \frac{c_{n-1}}{n}$$

$$n=1 \quad c_1 = c_0, \quad c_2 = \frac{c_1}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{2}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!}, \dots, c_n = \frac{c_0}{n!}$$

تعريف: متسلسلة قوى x حول $x=a$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

وإذا كان $a=0$ فنحصل على

$$\therefore f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

تعريف :

نفترض أن المعادلة

$$P_0(x) y'' + P_1(x) y' + P_2(x) y = 0$$

حيث كل من $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ دوال تحليلية في x (أى يمكن التعبير عن كل منها بمتسلسلة قوى في x) فإن:

(١) $x = a$ (نقطة عادية) *ordinary point* إذا كان $P_0(a) \neq 0$.

(٢) أما إذا كانت $P_0(a) = 0$ فإن $x = 0$ تسمى نقطة شاذة (*Singular point*).

مثال:

$$xy'' + y' + xy = 0$$

حل المعادلة التفاضلية

الحل:

نفترض أن الحل على صورة متسلسلة لانهاية

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \quad (1)$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots$$

$$xy = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + a_4 x^5 + \dots$$

$$xy'' = 2a_2 x + 6a_3 x^2 + 12a_4 x^3 + 20a_5 x^4 + 30a_6 x^5 = 0$$

وقد وضعنا الحدود المتشابهة تحت عمود واحد لسهولة الحل

$$y'' = y' + xy = a_1 + (a_0 + 4a_2)x + (a_1 + 9a_3)x^2 + (a_2 + 16a_4)x^3 + \dots$$

وحيث أن هذه متطابقة فإنه بوضع المعاملات مساوية للصفر

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{a_0}{4}, \quad a_3 = -\frac{a_1}{9} = 0,$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{16} - \frac{a_0}{4 \cdot 16}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{25} = 0, \quad a_6 = \frac{-a_4}{36} = \frac{a_0}{4 \cdot 16 \cdot 36}$$

وبذلك نحصل على

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$$

وبالتعويض بالقيم المتبقية فى المعادلة (1) نحصل على :

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4 \cdot 16} - \frac{x^6}{4 \cdot 16 \cdot 36} + \dots \right)$$

وهذا الحل يمكن كتابته أيضا فى الصورة:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \quad (2)$$

يتبقى الآن سؤالان:

(١) هل المتسلسلة (2) التى تمثل حل المعادلة (1) تقاربية ولأى قيم للمتغير x ؟

(٢) هل المتسلسلة (2) فعلا حلا للمعادلة (1) ؟

الإجابة:

الإجابة على السؤال الأول بسيطة ومن معلوماتنا عن المتسلسلات يمكننا مثلا تطبيق اختبار النسبة لنرى أن المتسلسلة (2) تقاربية لجميع قيم x .

أما بالنسبة للسؤال الثانى فالإجابة عليه هو أن نسلك الطريق العكسى بمعنى أننا نفاضل المتسلسلة (2) حدا بعد حد مع الأخذ فى الاعتبار النظرية الهامة والقائلة بأن "عملية تفاضل متسلسلة ما تقاربية حدا بعد لا يؤثر فى تقاربها ثم نعوض فى المعادلة للتفاضلية المعطاة فنجد أنها تحقّقها (يتّرك هذا كتمرين) .

ملحوظة أخيرة على هذا المثال : بالنظر إلى المتسلسلة (2) نجد أنها غير مألوفة لنا (بمعنى أنها ليست على صورة المتسلسلة الأسية أو اللوغاريتمية أو حتى متسلسلة جيب أو جيب التمام) وأول من اكتشف هذه المتسلسلة هو العالم الفلكي بسل *F. Bessel* . ولذلك تسمى المتسلسلة (2) بمتسلسلة بسل من الرتبة صفر (لأنه كان قد اكتشف متسلسلات أخرى من الرتبة ١ ، ٢ ، ٣ ،) ويرمز للمتسلسلة (2) بالرمز $J_0(x)$ ويمكن حساب

$$\begin{aligned} J_0(0) &= 1, & J_0(1) &= 0.76, & J_0(2) &= 0.22 \\ J_0(3) &= 0.26, & J_0(4) &= -0.40, & J_0(5) &= 0.18 \end{aligned}$$

انطلاقاً من هذا المثال نخطو الآن نحو الطرق المختلفة لحل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات :

٢- طريقة متسلسلات تايلور: *The method of Taylor Series*

الحل المطلوب لمعادلة تفاضلية ما هو $y(x)$ ولانه يمكن وضعه على صورة مفكوك حول النقطة $x=a$ أى أن:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + y'''(a)(x-a)^3 + \dots \quad (3)$$

بهذه الطريقة يمكننا كتابة الحل $y(x)$ على هذه الصورة إذا ما علمت المشتقات $y'(a), y''(a), \dots$

مثال :

$$y'' = xy$$

حل المعادلة

الحل:

نفترض أن $a=0$ وأن الحل المطلوب هو :

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots$$

وبتطبيق نفس الأسلوب كما في المثال السابق نحصل على الحل على الصورة :

$$y = c_1 + c_2 x + c_1 \frac{x^3}{3} + 2c_2 x^4 + \frac{4c_1 x^6}{6} + \dots$$

$$y = c_1 \left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{4x^6}{6} + \dots \right) + c_2 \left(x + \frac{2x^4}{4} + \frac{10x^7}{7} + \dots \right)$$

وهذا هو الحل العام وسنترك اختبار تقارب هذه المتسلسلة كتمرين.

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية في صورة متسلسلة قوى في x .

$$(1-x^2)y'' + xy' - y = 0$$

الحل:

$$P_0(x) = 1 + x^2 \Rightarrow P_0(0) = 1 \neq 0$$

لدينا

$\therefore x=0$ نقطة عادية .

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

نفترض أن الحل على الصورة :

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}$$

وعلى ذلك :

بالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$(1+x^2) \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

بمساواة مجموع معاملات x^{n-2} بالصفر فنحصل على:

$$\therefore c_n n(n-1) + c_{n-2}(n-2)(n-3) + c_{n-2}(n-2) - c_{n-2} = 0$$

$$\therefore c_n n(n-1) + c_{n-2}[n(n-2) - 1] = 0$$

$$\therefore c_n n(n-1) + c_{n-2}(n-3)(n-1) = 0, \quad n \geq 2$$

$$\therefore c_n n + c_{n-2}(n-3) = 0$$

$$c_n = \frac{3-n}{n} c_{n-2}, \quad n \geq 2$$

∴ العلاقة التكرارية

نفترض أن c_2, c_1 ثابتان اختياريان وعلى ذلك فإنه عندما :

$$n=2: \quad c_2 = \frac{1}{2} c_0$$

$$n=4: \quad c_4 = \frac{-1}{4} c_2 = \frac{-1}{8} c_0$$

$$n=6: \quad c_6 = \frac{-3}{6} c_4 = \frac{3}{48} c_0 = \frac{1}{16} c_0$$

$$n=8: \quad c_8 = \frac{-5}{8} c_6 = \frac{-5}{128} c_0, \quad k$$

$$n=3: \quad c_3 = 0 \Rightarrow c_5 = c_7 = \dots = 0$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \dots + (c_1 x + c_3 x^3 + \dots)$$

$$= c_0 \left[1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + \dots \right] + c_1 x$$

أى أن الحل العام هو :

$$y = A \left[1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - \frac{5}{128} x^8 + \dots \right] + Bx$$

مثال:

أوجدى حل المعادلة التفاضلية التالية فى صورة متسلسلة قوى (x-2)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (x-1) \frac{dy}{dx} + y = 0$$

الحل:

حيث أن x=2 نقطة عادية نفترض أن $x-2 = z$ وبالتالي فإن :

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\therefore \frac{d^2 y}{dz^2} + (z+1) \frac{dy}{dz} + y = 0$$

وعلى ذلك فإن $z=0$ نقطة عادية.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{نفترض أن الحل على الصورة :}$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \sum c_n n z^{n-1}, \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \sum c_n n(n-1) z^{n-2} \quad \text{فيكون :}$$

بالتعويض فى المعادلة المعطاة

$$\therefore \sum c_n n(n-1) z^{n-2} + \sum c_n n z^{n-1} + \sum c_n z^n = 0$$

بمساواة مجموع معاملات z^{n-2} (أقل أس لـ z) بالصفر نجد أن

$$\therefore c_n n(n-1) + c_{n-2}(n-2) + c_{n-1}(n-1) + c_{n-2} = 0$$

$$\therefore c_n n(n-1) = -(n-1)(c_{n-1} + c_{n-2}); \quad n \geq 2$$

$$\therefore c_n = \frac{-1}{n} [c_{n-1} + c_{n-2}] \quad n \geq 2$$

نفترض أن c_0, c_1 ثابتان اختياريان فنجد أن :

$$\therefore c_2 = \frac{-1}{2}(c_1 + c_0)$$

$$\therefore c_3 = \frac{-1}{3}(c_2 + c_1) = \frac{-1}{3} \left[\frac{1}{2}(c_1 + c_0) + c_1 \right] = \frac{-1}{6}[c_1 - c_0]$$

$$\therefore c_4 = \frac{-1}{4}(c_3 + c_2) = \frac{-1}{4} \left[\frac{1}{6}(c_0 - c_1) - \frac{1}{2}(c_1 + c_0) \right] = \frac{1}{12}(c_0 + 2c_1)$$

وبالتالي يكون حل المعادلة على الصورة :

$$y = \sum c_n z^n$$

$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots$$

$$= c_0 \left[1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{16} z^3 + \frac{1}{12} z^4 + \dots \right] + c_1 \left[z - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{6} z^4 + \dots \right]$$

وعلى ذلك يكون الحل العام المطلوب للمعادلة المعطاة هو :

$$y = A \left[1 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{12}(x-2)^4 + \dots \right]$$

$$+ B \left[(x-2) - \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 + \frac{1}{6}(x-2)^4 + \dots \right]$$

٣- طريقة فروبنيس The method of Frobenius

فى بعض الأحيان يكتشف الباحث فى المجالات التطبيقية أن المعادلة التفاضلية التى لديه لا يمكن حلها بالطرق العادية ولا حتى بطرق المتسلسلات السابقة ، أى أنه لا يمكن كتابة الحل فى صورة متسلسلة قوى فى x أو على صورة مفكوك تايلور وما على الباحث حينئذ إلا أن يفترض صورة أخرى للحل (وهو مازال يستخدم طريقة المتسلسلات) إذا نفترض أن الحل على الصورة :-

$$y = x^c (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \quad (4)$$

$$= x^c \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r, \quad a_0 \neq 0$$

هذه المتسلسلة هى تعميم للمتسلسلة (1) لأنه بوضع $c = 0$ فى (4) نحصل على المتسلسلة (1) والمتسلسلة (4) تعرف بمتسلسلة فروبنيس وهى ذات فاعلية فى إيجاد حل المعادلة التفاضلية التى على الصورة :

$$P(x) \cdot y'' + q(x) y' + r(x) y = 0$$

حيث r, q, p كثيرات حدود فى x .

مثال :

$$4x y'' + 2y' + y = 0 \quad \text{حل المعادلة التفاضلية}$$

الحل :

نفترض أن الحل على صورة المتسلسلة (4) والتى يمكن كتابتها كما يلى :

$$y(x) = a_0 x^c + a_1 x^{c+1} + a_2 x^{c+2} + a_3 x^{c+3} + a_4 x^{c+4} + \dots$$

$$y' = c a_0 x^{c-1} + a_1 (c+1) x^c + a_2 (c+2) x^{c+1} + a_3 (c+3) x^{c+2} + \dots$$

$$y'' = c(c-1) a_0 x^{c-2} + a_1 c(c+1) x^{c-1} + a_2 (c+1)(c+2) x^c + \dots$$

أى أن :

$$4xy'' = 4c(c-1)a_0x^{c-1} + 4a_1c(c+1)x^c + 4a_2(c+1)(c+1)x^{c+1} + \dots$$

$$2y' = 2ca_0x^{c-1} + 2a_1(c+1)x^c + 2a_2(c+2)x^{c+1} + \dots$$

$$y = a_0x^c + a_1x^{c+1} + \dots$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على :

$$\begin{aligned} 4xy'' + 2y' + y &= 2a_0c + 4c(c-1)a_0x^{c-1} \\ &+ 4(c+1)ca_1 + 2(c+1)a_1 + a_0x^c \\ &+ 4(c+2)(c+1)a_2 + 2(c+2)a_2 + a_1x^{c+1} + \dots = 0 \end{aligned}$$

ولكن هذه متطابقة فى قوى x وبمساواة معاملات x المختلفة بالصفر نحصل على :

$$\left. \begin{aligned} 2a_0c + 4c(c-1)a_0 &= 0 \\ 4(c+1)ca_1 + 2(c+1)a_1 + a_0 &= 0 \\ 4(c+2)(c+1)a_2 + 2(c+2)a_2 + a_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

وهكذا

نفترض أن $a_0 \neq 0$ فإنه يكون لدينا من المعادلات (5) :

$$c = 0 \quad c = \frac{1}{2}$$

أى أن الجذرين مختلفين والفرق بينهما عدد كسرى "الحالة الأولى".

هاتان القيمتان حصلنا عليهما من المعادلة الأولى فى (5) وتسمى هذه المعادلة

والناتجة من مساواة معامل أقل قوة للمتغير x بالصفر بالمعادلة الدليلية *Indicial*

Equation وجنورها بالجذور الدليلية *Indicial Roots* وذلك بعد وضع $r = 0$ أى أن

الجذور الدليلية للمعادلة المعطاة هى : $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$

من المعادلة الثانية نحصل على :

$$a_1 = \frac{a_0}{4(c+1)c+2(c+1)}$$

ومن المعادلة الثالثة في (5) نحصل على :

$$a_2 = \frac{-a_1}{4(c+2)(c+1)+2(c+2)}$$

وهكذا وعموماً :

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{4(c+n)(c+n-1)+2(c+n)}, n=1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

والمعادلة (5) تسمى بالعلاقة التكرارية *Recurrence Relations* والتي منها يمكن استنتاج باقى المعاملات بدلالة c .

وفى هذا المثال هناك حالتان :

(i) عند $c=0$ لتكون المعاملات هى :

$$a = -\frac{1}{2}a_0, a_2 = -\frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24}, a_3 = -\frac{a_2}{30} = -\frac{a_0}{720}, \dots$$

وبذلك يكون :

$$y = A \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6} + \dots \right)$$

حيث A هو ثابت اختيارى بدلاً من a_0 .

(ii) عند $c = \frac{1}{2}$ يكون لدينا بعد التعويض عن هذه القيمة فى العلاقة التكرارية لجميع قيم :

$$a_1 = -\frac{a_0}{6}, a_2 = -\frac{a_1}{20} = \frac{a_0}{120}, a_3 = -\frac{a_2}{42} = -\frac{a_0}{5040}, \dots$$

$$y = B \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7} + \dots \right) \quad \text{وعلى ذلك فإن :}$$

حيث هنا B هو ثابت اختياري بدلاً من a_0 :

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة هو :

$$y = A \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \dots \right) + B \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7} + \dots \right)$$

واضح أن كلا من المتسلسلتين تقاربان لجميع قيم x .

وبتعودنا على شكل المتسلسلات المختلفة يمكننا استنتاج أن الحل هو فعلاً :

$$y = A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}$$

وطبعاً ليس هذا التوفيق دائماً في أن نعرف مفكوك المتسلسلات التي يحتويها الحل أى دوال تناظر .

والآن لحل المعادلة التفاضلية :

$$P(x) y'' + q(x) y' + r(x) y = 0$$

لا بد من مراعاة بعض الملاحظات على هذه المعادلة والتي نضعها في صيغة تعاريف :

تعريف (١) : يقال للنقطة $x = a$ أنها نقطة عادية Ordinary Point للمعادلة (7) إذا كان $P(a) \neq 0$.

تعريف (٢) : إذا كان $P(a) = 0$ فإن النقطة $x = a$ تسمى نقطة شاذة Singular Point للمعادلة (7) .

تعريف (٣) : إذا كان $P(a) = 0$ وكانت النهايتان :

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a) \frac{q(x)}{p(x)} \text{ and } \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^2 \frac{r(x)}{p(x)}$$

موجودتان فإن النقطة $x=a$ تسمى نقطة شاذة منتظمة *Regular* *Singular Point* وإلا كانت هذه النقطة ، نقطة شاذة غير منتظمة .

نظرية : إذا كانت $x = a$ نقطة عادية أو نقطة شاذة منتظمة فإنه يوجد دائماً للمعادلة (7) حل في الصورة :

$$y = (x-a)^c [a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots] \quad (8)$$
$$= (x-a)^c \sum a_r (x-a)^r , \quad a_0 \neq 0$$

وهذا الحل يعرف بمتسلسلة فروبنويس حول النقطة $x = a$

ملحوظة (١) : في المثال السابق والأمثلة التالية تكون $x=0$ نقطة شاذة منتظمة (تأكد من ذلك) .

ملحوظة (٢) : إذا لم يذكر قيمة a فإنه يفهم أن $a = 0$.

التعاريف السابقة بالإضافة إلى النظرية تمكنا من معرفة ما إذا كان للمعادلة (7) حل في الصورة (8) أم لا .

وعموماً إذا كانت المعادلة الدليلية لها جذران غير متساويان α, β والفرق بينهما عدد كسري فإننا نحصل على حلين مستقلين بالتعويض عن هذه القيم للعدد C في المتسلسلة :

$$y = x^c (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

الحالة الثانية : الجزران متساويان أى أن $x = \beta$ فإننا نحصل على حلين مستقلين بالتعويض عن قيم c فى y وفى $\frac{\partial y}{\partial c}$. الحل الثانى يتكون عادة من حاصل ضرب الحل الأول (أو مضروباً فى ثابت) فى $\ln x$ مضافاً إلى متسلسلة أخرى .

مثال :

حل معادلة بسل من الرتبة صفر ونحصل عليها من معادلة بسل من الرتبة n :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \quad \text{بوضع } n = 0 \text{ نحصل على :}$$

أى أن :

$$x y'' + y' + x y = 0 \quad (2)$$

$$a_r x^r \sum_{r=0}^{\infty} y = x^c \quad \text{نفترض أن الحل على الصورة}$$

وبالتعويض فى المعادلة (2) نحصل على :

$$(c+r)(c+r-1)a_r x^{c+r-1} + (c+r)a_r x^{c+r-1} + a_r x^{c+r-1} = 0$$

وبمساواة معامل أقل أس بالصفر أى معامل x^{c+r-1} وهو :

$$(c+r)(c+r-1)a_r + (c+r)a_r + a_{r-2} = 0 \quad (3)$$

$$(c+r)(c+r-1+1)a_r + a_{r-2} = 0 \Rightarrow (c+r)^2 a_r = -a_{r-2}$$

لكل قيم r .

وهى العلاقة التكرارية ، وبوضع $r = 0$ نحصل على المعادلة التأسيسية :

$$(c+0)^2 a_0 = a_{-1} \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad , \quad a_{-1} = 0 \Rightarrow c = 0$$

بما أن (3) هى علاقة بين r و $(r-2)$ فيكون لدينا :

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2s+1} = 0$$

$$a_{2s} = \frac{(-1)a_{2s-2}}{(c+2s)^2} = \frac{(-1)^2 a_{2s-4}}{(C+2s)^2 (c+24-2)^2}$$

$$a_{2s} = (-1)^s a_0 (c+2s)^2 (c+2s-2) \dots (c+2)^2 \quad \text{أى أن :}$$

إن

$$y = x^c \left[a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} x^{2s} \right]$$

$$= x^c a_0 + a_0 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(c+2s)^2 (c+2s-2)^2 \dots (c+2)^2}$$

إن أحد الحلين هو :

$$y_1(c=0) = a_1 + \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)^2 (2s-2)^2 \dots 2^2}$$

$$= a_0 \left[1 + \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2} x \right)^{2s}}{s! s!} \right] = A j_0(x)$$

والحل الآخر هو : $\left(\frac{\partial y}{\partial c} \right)$ عند $c=0$:

$$\frac{\partial y}{\partial c} (y(c)) = x^c \ln x_0 a + a \frac{(-1)^s x^{2s}}{(c+2s)^2 \dots (c+2)^2} +$$

$$x^c \frac{2x^2}{(c+2)} - \frac{2x^4}{(c+2)^2 (c+4)^2}$$

وعلى ذلك يكون

$$\left. \frac{\partial y}{\partial c} \right|_{c=0} = a_0 \ln x y_1(x) + a_0 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right]$$

أى أن الحل الثانى هو :

$$y_2 = B \left[\ln x \cdot y_1(x) + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \dots \right]$$

$$y = y_1 + y_2$$

ويكون الحل العام هو :

الحالة الثالثة : الجذران مختلفان والفروق بينهما عدد صحيح K يجعل المعامل a_k لا نهائى .

فى هذه الحالة نضع $\alpha - \beta = K$ وإذا كان أحد معاملات y أصبح لا نهائى عندما $c = \beta$ فإننا نحصل على حلين مستقلين بوضع $c = \alpha$ و $c = \beta$ فى $\frac{\partial}{\partial c}(c - \beta)y$ بعد التفاضل .

مثال :

حل معادلة بسل من الدرجة الأولى :

$$i. e. x^2 y'' + x y' + (x^2 - 1)y = 0$$

نفترض أن $y = x^c \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ ، و $a \neq 0$ وبالتعويض فى المعادلة السابقة :

$$\therefore \sum (c+r)(c+r-1)a_r x^{c+r} + \sum (c+r)a_r x^{c+r} + \sum a_r x^{c+r} + \sum a_r x^{c+r+2} = 0$$

وبمساواة معامل أقل أس لـ x بالصفر وهو معامل x^{c+r} :

$$[(c+r)(c+r-1) + (c+r) - 1]a_r + a_{r-2} = 0$$

$$[(r+c)(r+c) - 1]a_r + a_{r-2} = 0$$

$$\therefore a_r = -a_{r-2} / (c+r-1)(c+r+1)$$

$$(c^2 - 1)a_0 = 0$$

المعاملة الدليلية هى (بوضع $r=0$) :

$$\therefore c = 1, \quad -1$$

$$a_2 = 0, \quad a_0 \neq 0 \text{ حيث}$$

$$a_1 = 0 \text{ لقيمتي } c \text{ وعلى ذلك :}$$

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$$

$$a_{2s} = -a_{2s-2}(c+2s-1)(c+2s+1)$$

$$a_{2s-2} = \frac{(-1)^2 a_{2s-4}}{(c+2s+1)(c+2s-1)(c+2s-3)(c-2s-1)}$$

$$= \dots$$

$$a_{2s} = \frac{(-1)^s a_0}{(c+2s-1)(c+1)(c+2s+1)\dots(c+3)}$$

الحل الأول :

$$y_1 = y(c=1) = x^c \left(a_0 + \sum_1^{\infty} a_{2s} x^{2s} \right)$$

أى أن :

$$y_1 = x \left(a_0 + \sum \frac{(-1)^s a_0 x^{2s}}{2s(2s-2) \dots 2(2s+2)(2s \dots 4)} \right)$$

$$= x \left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^s s 2^s (s+1)} \right)$$

$$= x \sum_0^{\infty} \frac{(-1) \left(\frac{1}{2} x \right)^{2s+1}}{s (s+1)}$$

الحل الثانى :

$$y = \frac{\partial}{\partial c} [(c+1)y]$$

عند $C = -1$

الذى يعطى :

$$y_2 = \beta \left[\ln x \sum \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2}x \right)^{2s} - 1}{s(s-1)} + \frac{1}{x} \right. \\ \left. + \sum \frac{(-1)^{s+1} \left(\frac{1}{2}x \right)^{2s-1}}{(s-1)s} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2s} \right) \right]$$

الحالة الرابعة : الجذران مختلفان والفرق بينهما عدد صحيح K يجعل أحد المعاملات غير معين .

فى هذه الحالة يكون للمعادلة الدليلية جذران α, β , $\alpha - \beta = K$, عدد صحيح وإذا كان أحد المعاملات غير معين عندما $c = \beta$ فإن حل المعادلة يعطى بوضع $C = \beta$ فى y التى تحتوى على ثابتين اختياريين ، إذا وضعنا $c = \alpha$ فى y فإنه يعطى إحدى المتسلسلتين الموجودة فى الحل الأول مضروبة فى ثابت .

مثال :

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

حل المعادلة

الحل :

بوضع $y = x^c \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$ فى المعادلة كما سبق فيكون معامل x^{c+r-2} هو :

$$(c+r)(c+r-1)a_r - (c+r-2)(c+r-3)a_{r-2} - 2(c+r-2)a_{r-2} + 2a_{r-2} = 0$$

$$(c+r)(c+r-1)a_r = [(c+r-2)(c+r-1) - 2]a_{r-2}$$

بوضع $r = 0$ فنحصل على المعادلة الدليلية :

$$c(c-1)a_0 = 0 \Rightarrow c=0, \quad c=1$$

وتكون للعلاقة التكرارية :

$$a_r = \frac{(c+r-2)(c+r-1)-2}{(c+r)(c+r-1)} a_{r-2}$$

عند $c=0$ نحصل على :

$$a_r = \frac{(r-2)(r-1)-2}{r(r-1)} a_{r-2}$$

$$a_r = \frac{r-3}{r-1} a_{r-2} \quad a = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

$$a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$$

$$a_{2s} = \frac{2s-3}{2s-1} a_{2s-2}$$

$$a_{2s-2} = \frac{(2s-3)(2s-5)}{(2s-1)(2s-3)} a_{2s-4}$$

$$= \frac{2s-5}{2s-1} a_{2s} = \frac{-1}{2s-1} a_0$$

يكون الحل الأول :

$$y_1 = (at C=0) = a_0 + a_1 X + a_0 X^2 - \frac{a_0}{3} X^4 - \frac{a_0}{5} X^6 - \frac{a_0}{7} X^8 \dots\dots$$

$$y_1 = a_0 \left[1 - x^2 - \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^6 - \frac{1}{7} x^8 + \dots \right] + a_1 x$$

$$y = A \left[1 - x^2 - \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{5} x^6 + \dots \right] + \beta x$$

حيث A, β ثابتان اختياريان وهو يمثل الحل العام للمعادلة .

أى عند $c=1$

$$a_r = \frac{(r-1)(r)-2}{r(r+1)}$$

$$= \frac{(r-1)(r-2)}{r(r+1)} a_{r-2}$$

$$a_r = \left[\frac{(r-2)}{r} \right] a_{r-2}$$

$$a_1 = 0 = a_3 = a_5 = \dots\dots\dots$$

$$a_2 = 0 \quad , \quad a_4 = 0 \quad \dots\dots\dots$$

ويكون الحل الثانى هو $y = a_0 x$ وهو جزء من الحل الأول (أى $c = 1$, $y = a_0 x^c$)

ويكون الحل العام هو : $y = A y_1 + B y_2$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

ملحوظة : يمكن استخدام طريقة فروبنيوس لإيجاد الحل عند قيم x الكبيرة جداً (أنظر الجزء الثانى من الكتاب) مع أمثلة متعددة محلولة .

تمارين

١- أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية في صورة متسلسلة لانتهائية ثم حاول مقارنته بالحل الكامل للمعادلة :

i. $y'' + y = 0$

ii. $y'' - y - 2y = 0$

iii. $y'' + y' = 0$

iv. $x^2 y'' + xy + (x^2 - 1)y = 0$

v. $(1 - x^2)y - 2xy' + 6y = 0$

$y(1) = 1$, $y'(0) = 0$

vi. $(x^2 - 2x)y'' + (2 - 2x)y' + 2y = 0$

$y(0) = 0$, $y(1) = 1$

vii. $y'' + xy = \sin x$

٢- أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية باستخدام مفكوك تايلور وذلك حول النقطة $(a, 0)$.

i. $y'' + y = x$

ii. $y'' = x + 4y$, $y(0) = y'(0) = 0$

iii. $y'' + xy + y = 0$

iv. $x^2 y'' = x + 1$, $y(1) = y'(1) = 0$ ($a = 1$)

٣- أوجد حل المعادلات التالية في متسلسلة قوى $(x-1)$:

i. $(x^2 - 2x + 2)y'' - 4(x-1)y' + 6y = 0$

ii. $y'' + (x-1)^2 y' - 4(x-1)y = 0$

iii. $y'' + (x-1)y' + y = 0$

٤- أوجد بطريقة فروبنيوس حل كل من المعادلات التفاضلية الآتية :

i. $xy'' + y = 0$

ii. $x^2 y'' + xy + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)y = 0$

iii. $x(1-x)y'' + 2y' + 2y = 0$

iv. $x^2 y'' + xy + (x^2 - 4)y = 0$

v. $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$

vi. $xy'' + 2y' + xy = 2x$

٥- اثبت أنه لا يوجد حل على صورة متسلسلة فروبنيوس للمعادلة :

$$x^4 y'' + 2x^3 y + y = 0$$

$$x = \frac{1}{U}$$

حل المعادلة باستخدام التعويض

٦- بين كيفية إيجاد حل على صورة سلسلة فروبنيوس للمعادلة :

$$(\sin x)y'' + xy' + y = 0$$

٧- المعادلة التفاضلية :

$$x(1-x)y'' + y - (a+B+1)xy' - aBy = 0$$

Gauss's Differential Equation

تسمى بمعادلة جاوس التفاضلية

أو المعادلة التفاضلية فوق الهندسية Hypergeometric Differential Equation

اثبت أن حلها بطريقة المتسلسلات هو متسلسلة على الصورة

$$y = 1 + \frac{aB}{1y}x + \frac{a(a+1)B(B+1)}{12y(y+1)}x^2 + \dots$$

(Hypergeometric Series)

(تسمى هذه المتسلسلة فوق الهندسية)

٨- حل المعادلات :

(1) $4xy'' + 2y' = 0$

(2) $2x(1-x)y'' + (1-x)y' + 3y = 0$

(3) $(x-x^2)y'' + (1-x)y' - y = 0$

(4) $xy'' + (1+x)y' + 2y = 0$

(5) $x^2 y'' + xy' - 2xt + 2y = 0$

(6) $x(1-x)y'' + 3xy' - y = 0$

(7) $(1-x^2)y'' - 2xy + 2y = 0$

(8) $y'' + x^2 y = 0$

٩- أثبت أنه إذا كانت γ ليست صفراً ولا عدداً صحيحاً فإن المعادلة :

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (x+B+1)x\}y' - xBy = 0$$

لها الحلين (المتقاربين إذا كانت $|x| < 1$)

$$F(x, B, \gamma, x), x^{1-\gamma} F(x-\gamma+1, B-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

حيث $F(x, B, \gamma, x)$ هي المتسلسلة

$$1 + \frac{x B}{1 \cdot \gamma} x + \frac{x(x+1)B(B+1)}{1 \cdot 2 \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

ملحق

جدول التكاملات

جدول التكاملات

Trigonometric Forms

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
3. $\int \tan x \, dx = -\log |\cos x| + C$
4. $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$
5. $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$
6. $\int \csc x \, dx = -\log |\csc x + \cot x| + C$
7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
8. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
10. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$
11. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$
12. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$
13. $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$
14. $\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\log |\sec x + \tan x| + C$
15. $\int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C$
16. $\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\cos x \sin x + \frac{3}{8}x + C$
17. $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx$
18. $\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx$
19. $\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx$
20. $\int \cot^n x \, dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x \, dx$
21. $\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \, dx$
22. $\int \csc^n x \, dx = -\frac{1}{n-1}\csc^{n-2} x \cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x \, dx$
23. $\int \sin ax \sin bx \, dx = -\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$
24. $\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x + C$
25. $\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)}\cos(a-b)x + C$
26. $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$
27. $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$
28. $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$

$$29. \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$30. \int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$$

$$31. \int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$$

$$32. \int \sin^m x \cos^n x \, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx \\ = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

Inverse Trigonometric Forms

$$33. \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$34. \int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$35. \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$$

$$36. \int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$$

$$37. \int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

$$38. \int \operatorname{arccsc} x \, dx = x \operatorname{arccsc} x + \log |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$$

Exponential and Logarithmic Forms

$$39. \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$43. \int x^n a^x \, dx = \frac{x^n a^x}{\log a} - \frac{n}{\log a} \int x^{n-1} a^x \, dx + C$$

$$40. \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

$$44. \int \frac{1}{x} \, dx = \log |x| + C$$

$$41. \int x e^x \, dx = x e^x - e^x + C$$

$$45. \int \log x \, dx = x \log x - x + C$$

$$42. \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$$

$$46. \int (\log x)^n \, dx = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} \, dx$$

$$47. \int \frac{1}{x \log x} \, dx = \log |\log x| + C$$

$$48. \int x^n \log x \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C$$

$$49. \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

$$50. \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

Hyperbolic Forms

$$51. \int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$54. \int \coth x \, dx = \log |\sinh x| + C$$

$$52. \int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$55. \int \operatorname{sech} x \, dx = \arctan(\sinh x) + C$$

$$53. \int \tanh x \, dx = \log \cosh x + C$$

$$56. \int \operatorname{csch} x \, dx = \log |\tanh \frac{1}{2} x| + C$$

$$\begin{aligned}
57. \int \operatorname{sech}^2 x \, dx &= \tanh x + C & 60. \int \operatorname{csch} x \coth x \, dx &= -\operatorname{csch} x + C \\
58. \int \operatorname{csch}^2 x \, dx &= -\coth x + C & 61. \int \sinh^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2} x + C \\
59. \int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx &= -\operatorname{sech} x + C & 62. \int \cosh^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{2} x + C \\
63. \int e^{ax} \sinh bx \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} (a \sinh bx - b \cosh bx) + C \\
64. \int e^{ax} \cosh bx \, dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} (a \cosh bx - b \sinh bx) + C
\end{aligned}$$

Forms Involving $a^2 - x^2$

$$\begin{aligned}
65. \int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \\
66. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= \arcsin \frac{x}{a} + C \\
67. \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \\
68. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C \\
69. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx &= \sqrt{a^2 - x^2} - a \log \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \\
70. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} \, dx &= -\frac{1}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \arcsin \frac{x}{a} + C \\
71. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \\
72. \int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= -\frac{1}{a} \log \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C \\
73. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \, dx &= -\frac{1}{a^2 x} \sqrt{a^2 - x^2} + C \\
74. \int (a^2 - x^2)^{3/2} \, dx &= -\frac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C \\
75. \int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \, dx &= \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C
\end{aligned}$$

Forms Involving $x^2 + a^2$

$$\begin{aligned}
76. \int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\
77. \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \\
78. \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} \, dx &= \frac{x}{8} (2x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \\
79. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} \, dx &= \sqrt{x^2 + a^2} - a \log \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C \\
80. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} \, dx &= -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \\
81. \int (x^2 + a^2)^{3/2} \, dx &= \frac{x}{8} (2x^2 + 5a^2) \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{8} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
82. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C \\
83. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C \\
84. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= -\frac{1}{a} \log \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C = -\frac{1}{a} \sinh^{-1} \frac{a}{x} + C \\
85. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx &= -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C \\
86. \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C
\end{aligned}$$

Forms Involving $x^2 - a^2$

$$\begin{aligned}
87. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \\
88. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
89. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\
90. \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\
91. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| + C \\
92. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx &= -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\
93. \int (x^2 - a^2)^{3/2} dx &= \frac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\
94. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + C \\
95. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\
96. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} dx &= \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C \\
97. \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx &= -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C
\end{aligned}$$

Forms Involving $a + bx$

$$\begin{aligned}
98. \int \frac{x}{a + bx} dx &= \frac{1}{b^2} (a + bx - a \log |a + bx|) + C \\
99. \int \frac{x^2}{a + bx} dx &= \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a + bx)^2 - 2a(a + bx) + a^2 \log |a + bx| \right] + C \\
100. \int \frac{x}{(a + bx)^2} dx &= \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a + bx} + \log |a + bx| \right) + C \\
101. \int \frac{x^2}{(a + bx)^2} dx &= \frac{1}{b^3} \left(a + bx - \frac{a^2}{a + bx} - 2a \log |a + bx| \right) + C \\
102. \int \frac{1}{x(a + bx)} dx &= \frac{1}{a} \log \left| \frac{x}{a + bx} \right| + C
\end{aligned}$$

$$103. \int \frac{1}{x^2(a+bx)} dx = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \log \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

$$104. \int \frac{1}{x(a+bx)^2} dx = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2} \log \left| \frac{x}{a+bx} \right| + C$$

Forms Involving $\sqrt{a+bx}$

$$105. \int x\sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{15b^3} (3bx-2a)(a+bx)^{3/2} + C$$

$$106. \int x^n \sqrt{a+bx} dx = \frac{2x^n(a+bx)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2an}{b(2n+3)} \int x^{n-1} \sqrt{a+bx} dx$$

$$107. \int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{3b^2} (bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$$

$$108. \int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2x^n \sqrt{a+bx}}{b(2n+1)} - \frac{2an}{b(2n+1)} \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{a+bx}} dx$$

$$109. \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \right| + C & \text{if } a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$110. \int \frac{1}{x^n \sqrt{a+bx}} dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{a(n-1)x^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{1}{x^{n-1} \sqrt{a+bx}} dx$$

$$111. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx$$

$$112. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n} dx = -\frac{(a+bx)^{3/2}}{a(n-1)x^{n-1}} - \frac{b(2n-5)}{2a(n-1)} \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}} dx$$

Forms Involving $\sqrt{2ax-x^2}$

$$113. \int \sqrt{2ax-x^2} dx = \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2} \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$114. \int x\sqrt{2ax-x^2} dx = \frac{2x^2-ax-3a^2}{6} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^3}{2} \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$115. \int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x} dx = \sqrt{2ax-x^2} + a \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$116. \int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2} dx = -\frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{x} - \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$117. \int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$118. \int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = -\sqrt{2ax-x^2} + a \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$119. \int \frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = -\frac{x+3a}{2} \sqrt{2ax-x^2} + \frac{3a^2}{2} \arccos \left(1 - \frac{x}{a} \right) + C$$

$$120. \int \frac{1}{x\sqrt{2ax-x^2}} dx = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax} + C$$

$$121. \int \frac{1}{(2ax-x^2)^{3/2}} dx = \frac{x-a}{a^2 \sqrt{2ax-x^2}} + C$$

المراجع

أولاً : المراجع الأجنبية :

- 1) M.D. Raisinghania: Advanced Differential Equations. S. Chand and Company Ltd., India 1991.
- 2) E.D. Rainville and P. Bedient: Elementary Differential Equations. McMillan Pub. Co., New York, 1980.
- 3) M. Rao: Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons. N.Y. 1989.
- 4) S. Ross: Ordinary Differential Equations. John Wiley and Sons. N.Y. 1990.

ثانياً المراجع العربية :

- ٥) المعادلات التفاضلية : ريتشارد برنسون (سلسلة شوم) الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ترجمة د. حسن العويضي ، د. عبد الوهاب عباس (٢٠٠١) القاهرة .
- ٦) نظريات المعادلات التفاضلية ، د. رحمة عبد الكريم ، مطبوعات جامعة الملك سعود ، ١٤٠٨هـ .
- ٧) نظريات وسائل ، المعادلات التفاضلية (سلسلة شوم) فرانك أيرز ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، ١٩٩٧م .
- ٨) المعادلات التفاضلية العادية ، الجزء الثانى : د. حسن العويضي - د. عبد الوهاب عباس ، د. سناء على زارع ، دار الرشد ، ٢٠٠٥ .